1-4 分析过程：

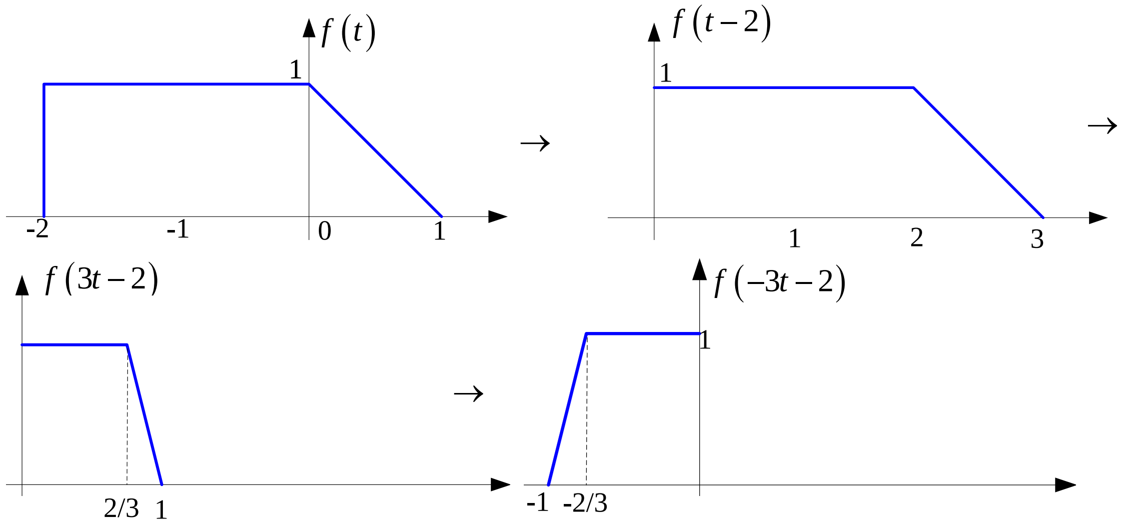
（1）例 1-1 的方法：$f(t) \to f(t-2) \to f(3t-2) \to f(-3t-2)$

（2）方法二：$f(t) \to f(3t) \to f\left[3\left(t-\frac{2}{3}\right)\right] \to f(-3t-2)$

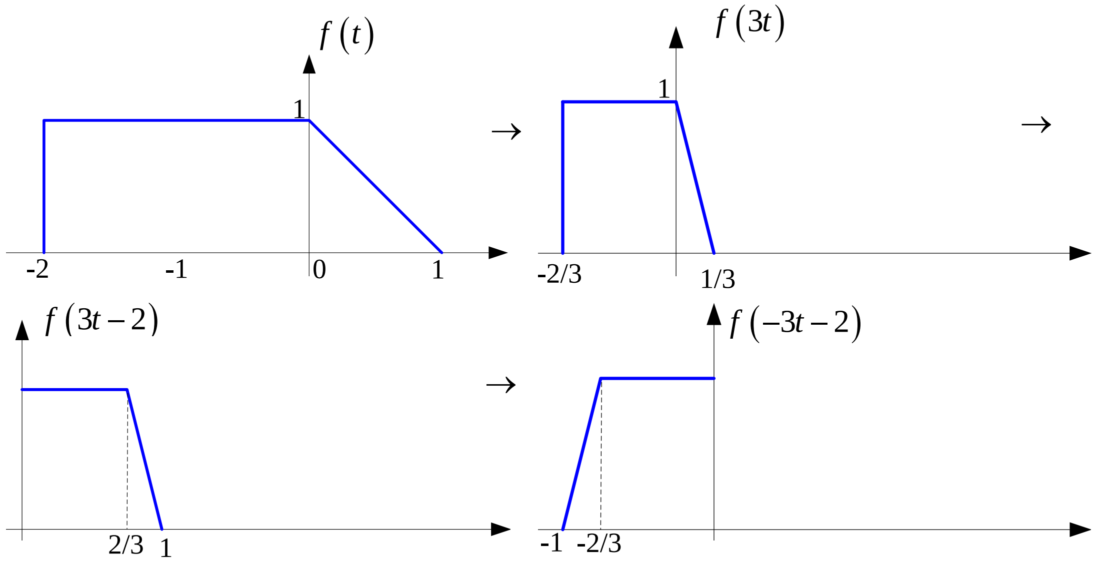
（3）方法三：$f(t) \to f(-t) \to f\left[-(t+2)\right] \to f(-3t-2)$

解题过程：

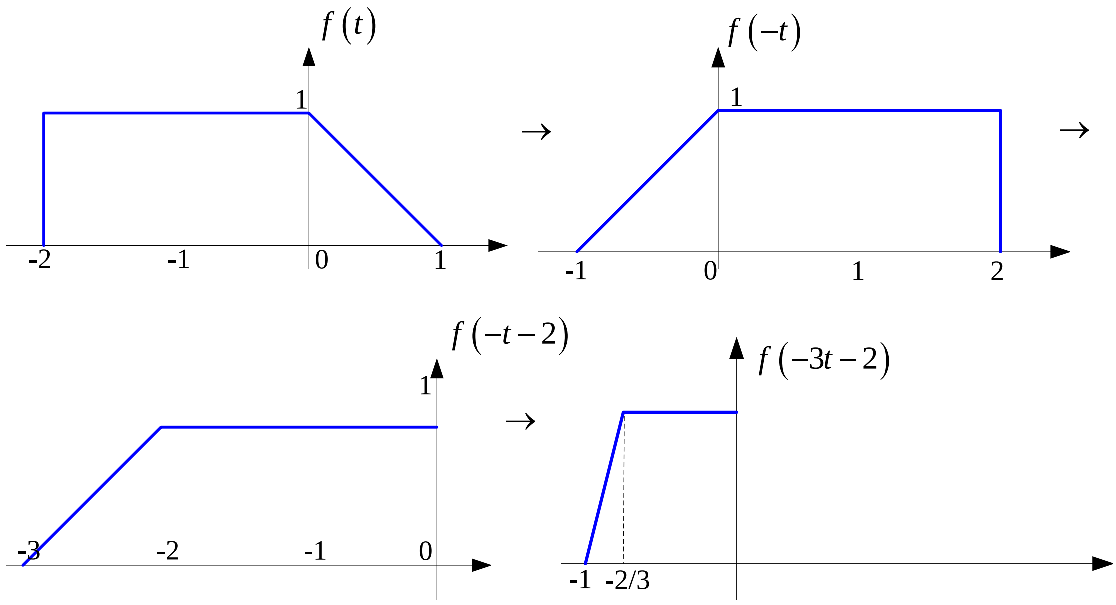
（1）方法一：



方法二：



方法三：



1-5 解题过程：

（1） $f(-at)$ 左移 t_0： $f\left[-a\left(t+t_0\right)\right]=f\left(-at-at_0\right)\neq f\left(t_0-at\right)$

（2） $f(at)$ 右移 t_0： $f\left[a\left(t-t_0\right)\right]=f\left(at-at_0\right)\neq f\left(t_0-at\right)$

（3） $f(at)$ 左移 $\dfrac{t_0}{a}$： $f\left[a\left(t+\dfrac{t_0}{a}\right)\right]=f\left(at+t_0\right)\neq f\left(t_0-at\right)$

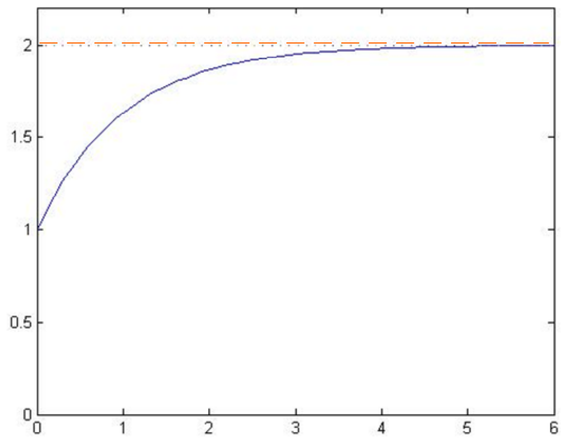
（4） $f(at)$ 右移 $\dfrac{t_0}{a}$： $f\left[-a\left(t-\dfrac{t_0}{a}\right)\right]=f\left(-at+t_0\right)=f\left(t_0-at\right)$

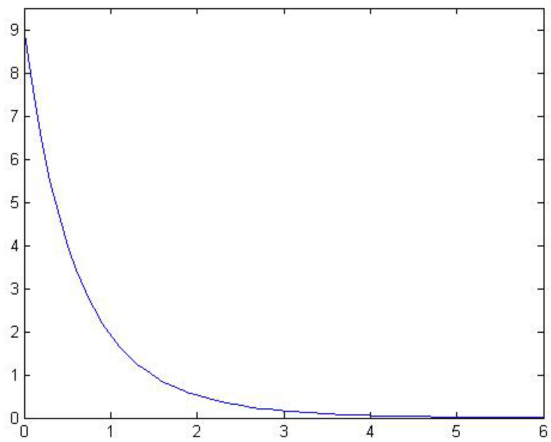
故（4）运算可以得到正确结果。

注：1-4、1-5 题考察信号时域运算：1-4 题说明采用不同的运算次序可以得到一致的结果；1-5 题提醒所有的运算是针对自变量 t 进行的。如果先进行尺度变换或者反转变换，再进行移位变换，一定要注意移位量和移位的方向。

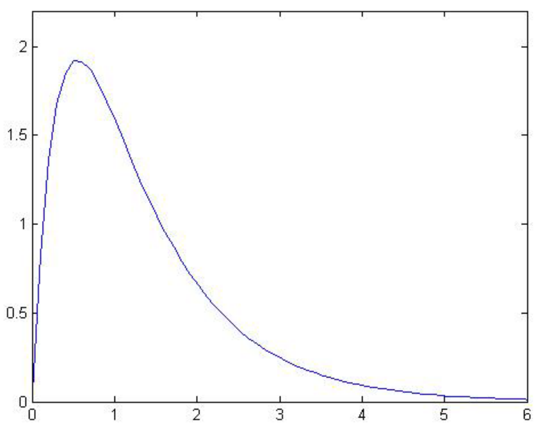
1-9 解题过程：

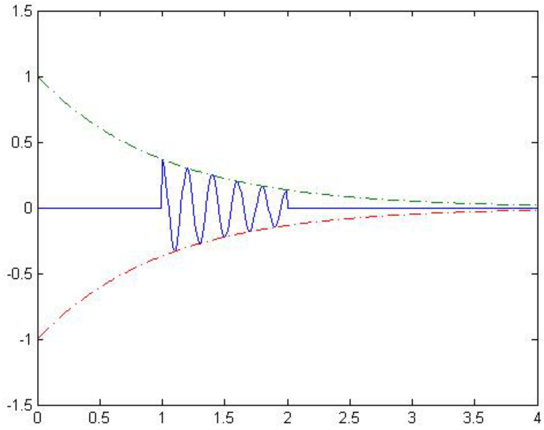
（1） $f(t)=\left(2-e^{-t}\right)u(t)$　　　　（2） $f(t)=\left(3e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t)$





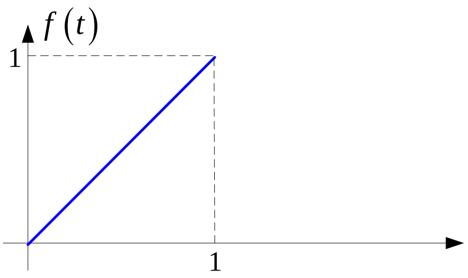
（3） $f(t)=\left(5e^{-t}-5e^{-2t}\right)u(t)$ （4） $f(t)=e^{-t}\cos(10\pi t)\left[u(t-1)-u(t-2)\right]$



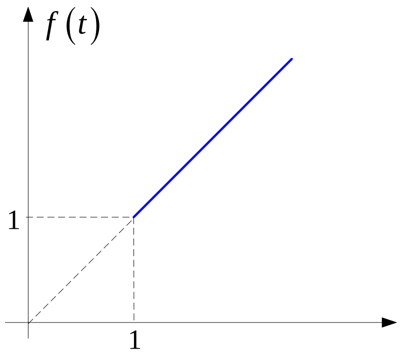


1-12 解题过程：

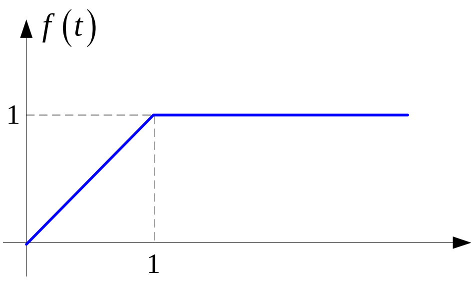
（1）



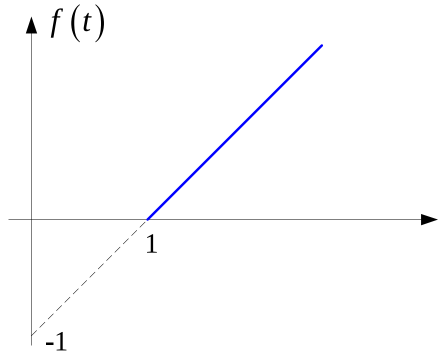
（2）



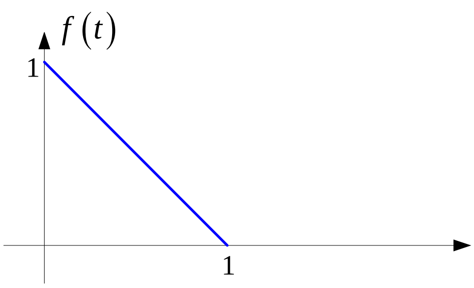
（3）



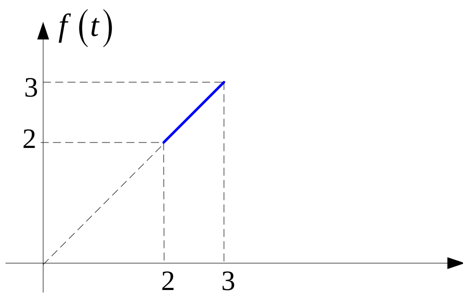
（4）



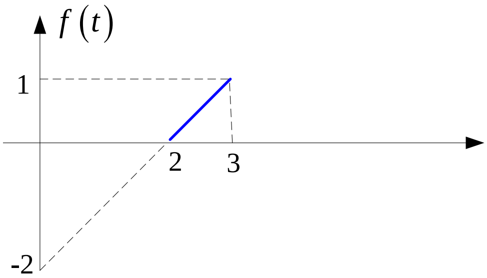
（5）



（6）



（7）



注：1-9、1-12 题中的时域信号均为实因果信号，即 $f(t)=f(t)u(t)$

1-18 分析过程：任何信号均可分解为奇分量与偶分量之和的形式，即

$$f(t)=f_e(t)+f_o(t) \quad \cdots \quad (1)$$

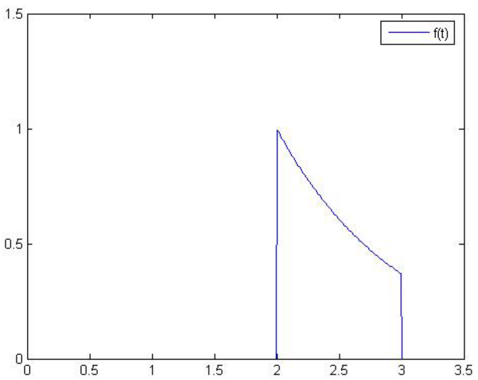
其中，$f_e(t)$ 为偶分量，$f_o(t)$ 为奇分量，二者性质如下：

$$f_e(t)=f_e(-t) \quad \cdots \quad (2)$$
$$f_o(t)=-f_o(-t) \quad \cdots \quad (3)$$

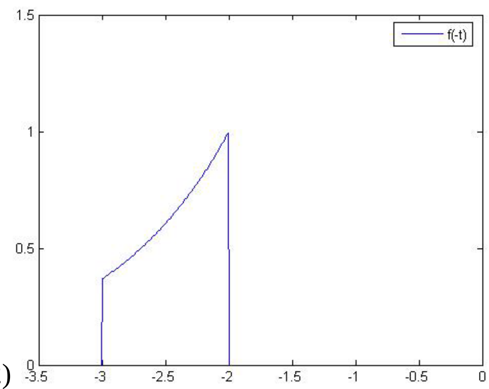
$(1)\sim(3)$式联立得

$$f_e(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right]$$
$$f_o(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]$$

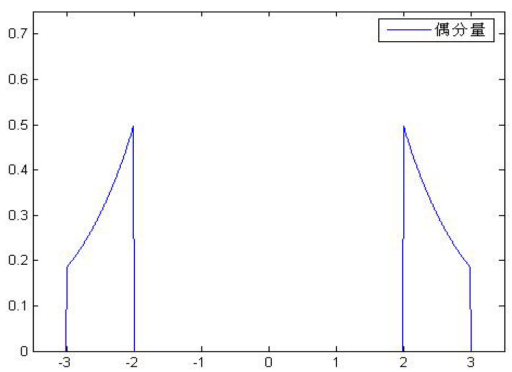
解题过程：



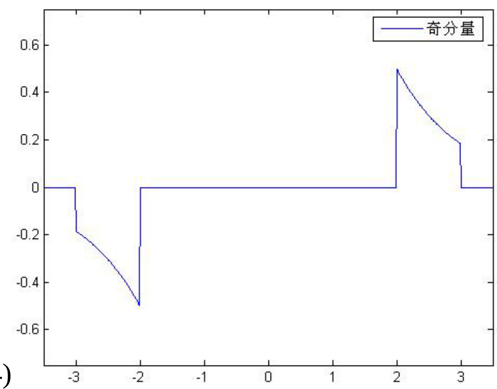
(a-1)



(a-2)

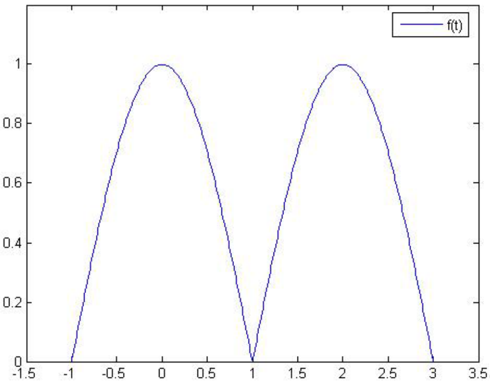


(a-3)

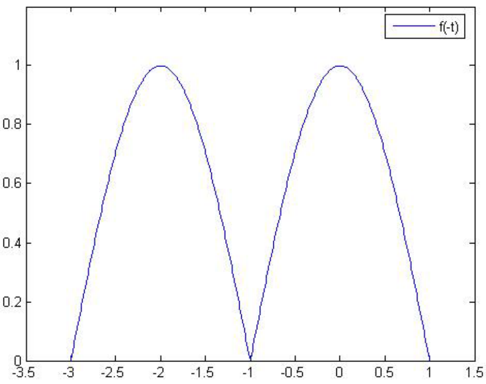


(a-4)

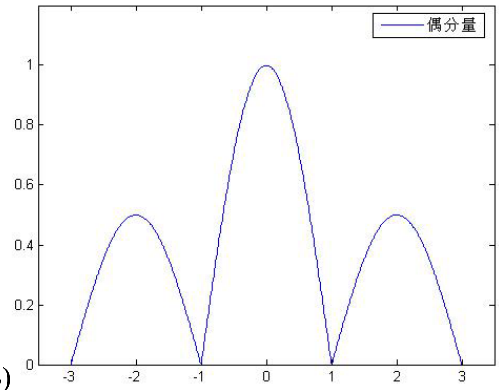
(b) $f(t)$ 为偶函数，故只有偶分量，为其本身



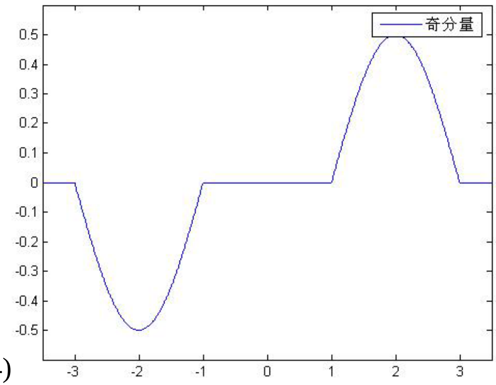
(c-1)



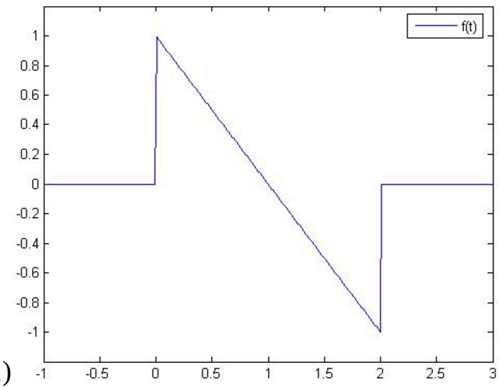
(c-2)



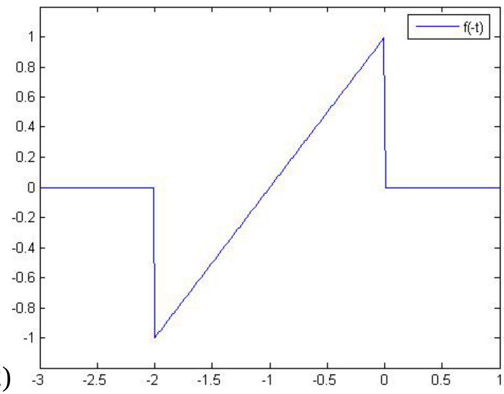
(c-3)



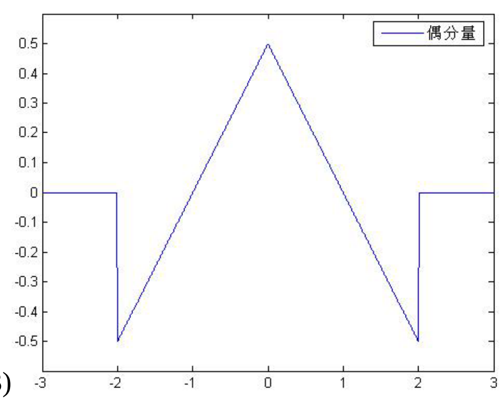
(c-4)



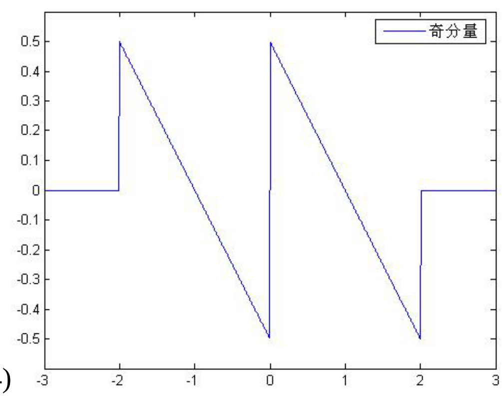
(d-1)



(d-2)



(d-3)



(d-4)

1-20 分析过程：本题为判断系统性质：线性、时不变性、因果性

（1）线性（Linearity）：基本含义为叠加性和均匀性

即输入 $x_1(t)$， $x_2(t)$ 得到的输出分别为 $y_1(t)$， $y_2(t)$， $T\left[x_1(t)\right]=y_1(t)$，

$T\left[x_2(t)\right]=y_2(t)$，则$T\left[c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\right]=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$（$c_1$， c_2为常数）。

线性系统是指系统的全响应可以分解为零输入响应和零状态响应，并且二者均分别具有线性性质。

本题未说明初始条件，可认为系统起始状态为零（“松弛”的），故零输入响应为零，只需判断系统的输入——输出是否满足线性。

（2）时不变性（Time-Invariblity）：是指当激励延迟一段时间t_0时，其响应也同样延迟t_0，波形形状不变。

（3）因果性（Causality）：是指系统在t_0时刻的响应只与$t=t_0$和$t<t_0$的时刻有关，与未来的时刻无关。

满足因果性的系统又称为物理可实现系统。

判断因果性的方法：

① 通过时域关系式：$y(t)=T\left[x(t)\right]$判断是否可能有$y(t_1)=T\left[x(t_2)\right]$，$t_1<t_2$的时刻出现。若有则非因果系统，否则为因果系统；

② 对于时间连续系统

$$\text{冲激响应}\quad h(t)\begin{cases}=h(t)u(t) & \text{因果系统}\\ \neq h(t)u(t) & \text{非因果系统}\end{cases}$$

③ 对于时间离散系统

$$\text{单位冲激响应}\quad h(n)\begin{cases}=h(n)u(n) & \text{因果系统}\\ \neq h(n)u(n) & \text{非因果系统}\end{cases}$$

解题过程：

（1）$r(t)=\dfrac{de(t)}{dt}$

线性：$r_1(t)=\dfrac{de_1(t)}{dt}$、$r_2(t)=\dfrac{de_2(t)}{dt}$，则$\dfrac{d\left[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)\right]}{dt}=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时不变：输入$e(t-t_0)$，输出$\dfrac{de(t-t_0)}{dt}=\dfrac{de(t-t_0)}{d(t-t_0)}=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$仅与此时刻$e(t)$有关

（2）$r(t)=e(t)u(t)$

线性：设$r_1(t)=e_1(t)u(t)$、$r_2(t)=e_2(t)u(t)$，

则$\left[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)\right]u(t)=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：输入$e(t-t_0)$，输出$e(t-t_0)u(t)\neq e(t-t_0)u(t-t_0)=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$仅与此时刻$e(t)$有关

（3）$r(t)=\sin\left[e(t)\right]u(t)$

非线性：设$r_1(t)=\sin\left[e_1(t)\right]u(t)$、$r_2(t)=\sin\left[e_2(t)\right]u(t)$，

则$\sin\left[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)\right]u(t)\neq\sin\left[c_1e_1(t)\right]u(t)+\sin\left[c_2e_2(t)\right]u(t)$

时变：输入$e(t-t_0)$，输出$\sin\left[e(t-t_0)\right]u(t)\neq\sin\left[e(t-t_0)\right]u(t-t_0)=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$仅与此时刻$e(t)$有关

（4）$r(t)=e(1-t)$

线性：设$r_1(t)=e_1(1-t)$、$r_2(t)=e_2(1-t)$，则$c_1e_1(1-t)+c_2e_2(1-t)=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：设$e_1(t)=u(t)-u(t-1.5)$，则$r_1(t)=u(t+0.5)-u(t)$

$e_2(t)=e_1(t-0.5)=u(t-0.5)-u(t-2)$，则$r_2(t)=u(t+1)-u(t-0.5)\neq r_1(t-0.5)$

非因果：取$t=0$，则$r(0)=e(1)$，即$t=0$时刻输出与$t=1$时刻输入有关。

（5）$r(t)=e(2t)$

线性：设$r_1(t)=e_1(2t)$、$r_2(t)=e_2(2t)$，则$c_1e_1(2t)+c_2e_2(2t)=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：设$e_1(t)=u(t)-u(t-2)$，则$r_1(t)=u(t)-u(t-1)$

$e_2(t)=e_1(t-2)=u(t-2)-u(t-4)$，则$r_2(t)=u(t-1)-u(t-2)\neq r_1(t-2)$

非因果：取$t=1$，则$r(1)=e(2)$，即$t=1$时刻输出与$t=2$时刻输入有关。

（6）$r(t)=e^2(t)$

非线性：设$r_1(t)=e_1^{\,2}(t)$、$r_2(t)=e_2^{\,2}(t)$，

则$\left[c_1e_1(t)+c_2e_2(t)\right]^2=c_1^{\,2}e_1^{\,2}(t)+c_2^{\,2}e_2^{\,2}(t)+2c_1c_2e_1(t)e_2(t)\neq c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时不变：输入$e(t-t_0)$，输出$e^2(t-t_0)=r(t-t_0)$

因果：$r(t)$仅与此时刻$e(t)$有关

（7）$r(t)=\int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau$

线性：设$r_1(t)=\int_{-\infty}^{t} e_1(\tau)d\tau$、$r_2(t)=\int_{-\infty}^{t} e_2(\tau)d\tau$，

则$\int_{-\infty}^{5t}\left[c_1e_1(\tau)+c_2e_2(\tau)\right]d\tau=r_1(t)=c_1\int_{-\infty}^{5t}e_1(\tau)d\tau+c_2\int_{-\infty}^{5t}e_2(\tau)d\tau=c_1r_1(t)+c_2r_2(t)$

时变：输入$e(t-t_0)$，输出$\int_{-\infty}^{5t}e(\tau-t_0)d\tau\overset{\tau-t_0=x}{=}\int_{-\infty}^{5t-t_0}e(x)dx\neq\int_{-\infty}^{5(t-t_0)}e(x)dx=r(t-t_0)$

非因果：$t=1$时，$r(1)=\int_{-\infty}^{5}e(\tau)d\tau$，$r(1)$与$(-\infty,5]$内的输入有关。

1-21 分析：一个系统可逆，当且仅当输入、输出时一一对应的关系

解题过程：

（1） 可逆。逆系统为$r(t)=e(t+5)$

（2） 不可逆。因为$r(t)=\frac{d}{dt}e(t)=\frac{d}{dt}\left[e(t)+C\right]$ C为任意常数

不满足一一对应关系。

（3） 可逆。逆系统为$r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$

（4） 可逆。逆系统为$r(t)=e\left(\frac{1}{2}t\right)$

1-23 解题过程：

利用线性时不变系统得微分特性

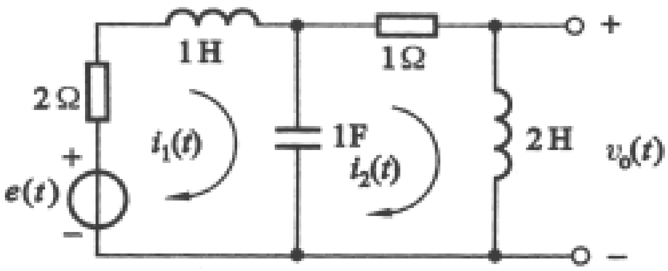
因为$e_2(t)=\frac{d}{dt}e_1(t)$，所以，

$$r_2(t)=\frac{d}{dt}r_1(t)=\frac{d}{dt}\left[e^{-\alpha t}u(t)\right]=-\alpha e^{-\alpha t}+e^{-\alpha t}\delta(t)=\delta(t)-\alpha e^{-\alpha t}$$

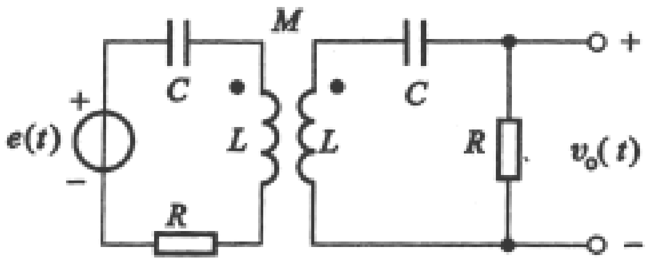
信号与系统习题答案（注：教材---郑君里编）

习题二

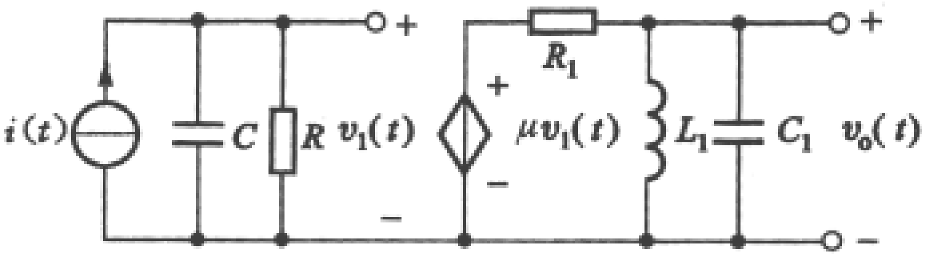
2-1　对下图所示电路图分别列写求电压的微分方程表示。



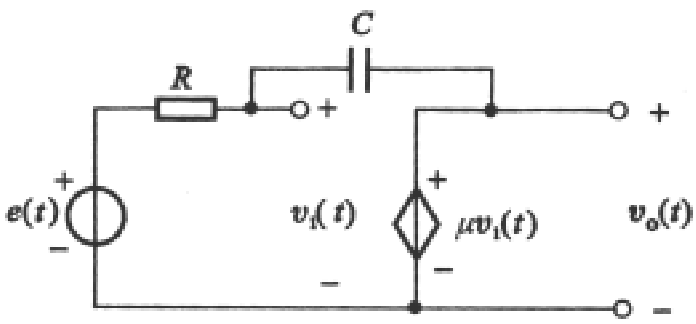
(a)



(b)



(c)



(d)

题图　2－1

图(a)：微分方程：

$$\begin{cases}2i_1(t)+1*\frac{di_1(t)}{dt}+u_c(t)=e(t)\\ 2\frac{di_2(t)}{dt}+i_2(t)=u_c(t)\\ u_0(t)=2\frac{di_2(t)}{dt}\\ \frac{du_c(t)}{dt}=i_1(t)-i_2(t)\end{cases}\Rightarrow$$

$$2\frac{d^3}{dt^3}v_0(t)+5\frac{d^2}{dt^2}v_0(t)+5\frac{d}{dt}v_0(t)+3v_0(t)=2\frac{d}{dt}e(t)$$

图（b）：微分方程：
$$\begin{cases}\frac{1}{C}\int i_1dt+Li_1^{'}+Mi_2^{'}+Ri_1=e(t)\\ \frac{1}{C}\int i_2dt+Li'_2+Mi'_1+Ri_2=0\\ v_0(t)=-Ri_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow(L^2-M^2)\frac{d^4}{dt^4}v_0(t)+2RL\frac{d^3}{dt^3}v_0(t)+(R^2+\frac{2L}{C})\frac{d^2}{dt^2}v_0(t)+\frac{2R}{C}\frac{d}{dt}v_0(t)+\frac{1}{C^2}v_0(t)=MR\frac{d^3}{dt^3}e(t)$$

图(c)微分方程：
$$v_0(t)=L_1i'_1=\frac{1}{C_1}\int i_2dt$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{dt}i_1=\frac{1}{L_1}v_0(t)\\ \frac{d^2}{dt^2}i_1=\frac{1}{L_1}v'_0(t)\\ i_1=\frac{1}{L_1}\int v_0(t)dt\end{cases}$$

$$\because\quad i_3=i_1+i_2=i_1+C_1L_1\frac{d^2}{dt^2}i_1(t)$$

$$\Rightarrow CC_1\frac{d^3}{dt^3}v_0+[\frac{C}{R_1}+\frac{C_1}{R}]\frac{d^2}{dt^2}v_0+[\frac{C}{L_1}+\frac{1}{RR_1}]\frac{d}{dt}v_0+\frac{1}{RL_1}v_0(t0=\frac{\mu}{R_1}\frac{d}{dt}e(t)$$

图(d)微分方程：
$$\begin{cases}e(t)=Ri_1(t)+\frac{1}{C}\int i_1(t)dt+\mu v_1(t)\\ v_1(t)=-Ri_1(t)+e(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow(1-\mu)\frac{d}{dt}v_1+\frac{1}{RC}V_1=\tfrac{1}{CR}e(t)$$

$$\because v_0(t)=\mu v_1(t)$$

$$\Rightarrow(1-v)Cv_0^{'}+\frac{1}{R}v_0(t)=\frac{v}{R}e(t)$$

2-4　已知系统相应的其次方程及其对应的 0+状态条件，求系统的零输入响应。

（1）　$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=0$　　给定：$r(0_+)=1,r^{'}(0_+)=2$ ；

特征方程：$\alpha^2+2\alpha+2=0$

特征根： $\alpha_1=-1+\mathrm{j}$ $\alpha_2=-1-\mathrm{j}$

零输入响应：$r(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$

代入初始条件，$\Rightarrow A_1=-1$ $\mathrm{A}_2=2$

$$r(t)=-e^{\alpha_1 t}+2e^{\alpha_2 t}=e^{-t}(\cos t-3\sin t)$$

（2） $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+r(t)=0$ 给定：$r(0_+)=1,r^{'}(0_+)=2$ ；

特征方程： $\alpha^2+2\alpha+1=0$

特征根： $\alpha_1=\alpha_2=-1$

零输入响应：$r(t)=(A_1t+A_2)e^{-t}$

代入初始条件，$\Rightarrow A_1=3$ $\mathrm{A}_2=1$

$$r(t)=(3t+1)e^{-t}$$

（3）$\frac{d^3}{dt^3}r(t)+2\frac{d^2}{dt^2}r(t)+\frac{d}{dt}r(t)=0$ 给定：$r(0_+)=r^{'}(0_+)=0,r^{''}(0_+)=1$

特征方程： $\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=0$

特征根： $\alpha_1=\alpha_2=-1$ $\alpha=0$

零输入响应：$r(t)=(A_1t+A_2)e^{-t}+A_3$

代入初始条件，$\Rightarrow A_1=\mathrm{A}_2=-1$ $\mathrm{A}_3=1$

$$r(t)=1-(t+1)e^{-t}$$

2-5 给定系统微分方程、起始状态以及激励信号分别为以下三种情况：

（1） $\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=e(t),r(0\_)=0,e(t)=u(t)$

（2） $\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=3\frac{d}{dt}e(t),r(0\_)=0,e(t)=u(t)$

（3） $2\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=\frac{d}{dt}e(t),r(0\_)=1,r^{'}(0\_)=1,e(t)=u(t)$

试判断在起始点是否发生跳变，据此对（1）（2）分别写出其 $r(0_+)$值，对（3）写出 $r(0_+)$ 和 $r'(0_+)$值。

(1) (1) 由于方程右边没有冲激函数$\delta(t)$及其导数，所以在起始点没有跳变。

$\therefore$ $\mathrm{r}(0_+)=\mathrm{r}(0_-)=0$

(2) $\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=3\frac{d}{dt}e(t)$ $\because \frac{\mathrm{d}}{dt}e(t)=\delta(t)$,即方程右边有冲激函数$\delta(t)$

设：$\frac{d}{dt}r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$r(t)=a\Delta u(t)$

则有：$a\delta(t)+b\Delta u(t)+2a\Delta u(t)=3\delta(t)$

$\Rightarrow$ a = 3, b = -6

$\therefore$ $\mathrm{r}(0_+)=r(0_-)+a=3$

(3) $2\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+4r(t)=\frac{d}{dt}e(t) \quad \because \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e(t)=\delta(t)$ 即方程右边含有 $\delta(t)$

设：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)=a\delta^{'}(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)$

$\frac{d}{dt}r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$r(t)=a\Delta u(t)$

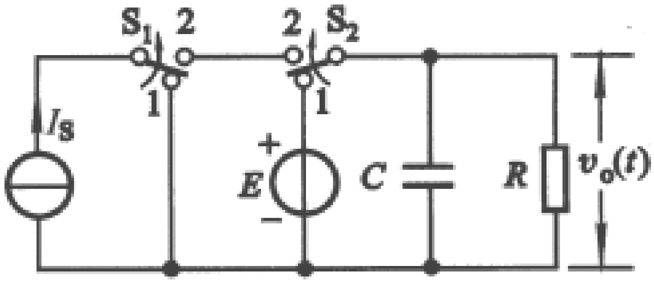
则有：$2a\delta^{'}(t)+2b\delta(t)+2c\Delta u(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)+4a\Delta u(t)=\delta(t)$

$\therefore \quad \mathrm{a}=0 \qquad \mathrm{b}=\frac{1}{2} \qquad \mathrm{c}=-\frac{3}{4}$

$\therefore r(0_+)=r(0_-)+a=1$

$r^{'}(0_+)=r^{'}(0_-)+b=\frac{3}{2}$

2-7 电路如图所示，t=0 以前开关位于“1”，已进入稳态，t=0 时刻，S_1 和 S_2 同时自“1”转至“2”，求输出电压 v0(t)的完全响应，并指出其零输入、零状态、自由、强迫各响应分量（E 和 I_S 各为常量）。



解：$t=0_-$ 时刻，$u_c(0_-)=E=v_0(0_-)$

$pCu_c(t)+\frac{v_0(t)}{R}=I_s u(t)$

$v_0(t)=u_c(t)$

∴系统微分方程：$C\frac{d}{dt}v_0(t)+\frac{1}{R}v_0(t)=I_s u(t)$

零状态响应：$r_{zi}(t)=(A_1e^{-\frac{1}{RC}t}+B)u(t)=(-RI_s e^{-\frac{1}{RC}t}+RI_s)u(t)$

零输入响应：$r_{zs}(t)=A_2e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)=Ee^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$

完全响应：$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=(\ Ee^{-\frac{1}{RC}t}-RI_s e^{-\frac{1}{RC}t}+RI_s)u(t)$

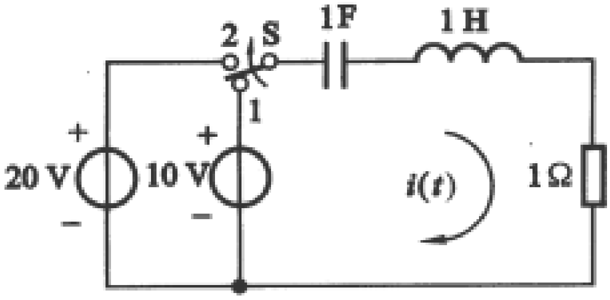
2-8 电路如图所示，$t<0$ 时，开关位于“1”且已达到稳定状态，$t=0$ 时刻，开关自“1”转至“2”。

(1)　(1)　试从物理概念判断 i(0-)，i’(0-)和 i(0+)，i’(0+)；

(2)　(2)　写出 $t\geq 0_+$ 时间内描述系统的微分方程表示，求 i(t)的完全响应；

(3)　(3)　写出一个方程式，可在时间 $-\infty<t<\infty$ 内描述系统，根据此式利用冲

激函数匹配原理判断 0-时刻和 0_+时刻状态的变化，并与（1）的结果比较。



解：

$) = 0$

$$i(0_+) = 0$$

$$i^{'}(0_-) = \frac{1}{L}u_l(0_-) = 0$$

$$i^{'}(0_+) = \frac{1}{L}u_l(0_-) = \frac{1}{L}[e(0) - u_c(0_-)] = 10$$

（2） $t > 0_+$ 时间内系统的微分方程：

$$\begin{cases} u_c(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) = 0 \\ i(t) = C\frac{d}{dt}u_c(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}i(t) + \frac{d}{dt}i(t) + i(t) = 0$$

全解： $i(t) = A_1 e^{(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})t} + A_2 e^{(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})t}$

代入初始条件 $i(0_+) = 0, i^{'}(0_+) = 10$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

（3）在 $-\infty < t < \infty$ 时间内，系统微分方程：

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}i(t) + \frac{d}{dt}i(t) + i(t) = \frac{d}{dt}e(t)$$，其中 $e(t) = 10 + 10u(t)$

2-9　求下列微分方程描述的系统冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$

（1） $\frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = 2\frac{d}{dt}e(t)$

（2） $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + \frac{d}{dt}r(t) + r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + e(t)$

（3） $\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 3\frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$

解：（1） $e(t) = \delta(t)$ 对应　系统冲激响应 h(t)

$$\frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = 2\delta^{'}(t)$$

$$h(t) = Ae^{-3t}u(t)$$

用冲激函数匹配法，设：

$$\frac{d}{dt}h(t)=a\delta^{'}(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)$$
$$h(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$$
则有：$a\delta^{'}(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)=2\delta^{'}(t)$

$\therefore\ a=2,b=-6,c=18$

$\therefore\ \ \mathrm{h(t)}=2\delta(\mathrm{t})-6\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}u(t)$

$e(t)=u(t)$ 对应于系统的阶跃响应 g(t)

则有：$\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=2\delta(t)$

$$g(t)=Ae^{-3t}u(t)$$

设：$\frac{d}{dt}g(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$$g(t)=a\Delta u(t)$$

$\Rightarrow a=2,b=-6$

$\Rightarrow g(t)=2e^{-3t}u(t)$

(2) $\frac{d^{2}}{dt^{2}}r(t)+\frac{d}{dt}r(t)+r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$

$e(t)=\delta(t)$ 对应　系统冲激响应 h(t)：

$$\frac{d^{2}}{dt^{2}}h(t)+\frac{d}{dt}h(t)+h(t)=\delta^{'}(t)+\delta(t)$$

$$h(t)=[A_1e^{(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})t}+A_2e^{(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})t}]u(t)$$

$$H(p)=\frac{p+1}{p^{2}+p+1}=\frac{\frac{j\sqrt{3}+1}{j2\sqrt{3}}}{p-\frac{-1+j\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{j\sqrt{3}-1}{j2\sqrt{3}}}{p-\frac{-1-j\sqrt{3}}{2}}$$

$\therefore$
$$h(t)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{j2\sqrt{3}})e^{\frac{-1+j\sqrt{3}}{2}t}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{j2\sqrt{3}})e^{\frac{-1-j\sqrt{3}}{2}t}\qquad t\geq 0$$
$$h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t)$$

$\therefore$
$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}h(\tau)d\tau$$
$$=[e^{-\frac{1}{2}t}(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)+1]u(t)$$

(3) $\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d^{2}}{dt^{2}}e(t)+3\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$

$$H(p)=\frac{p^{2}+3p+3}{p+2}+p+1+\frac{1}{p+2}$$

$\therefore h(t)=H(p)\delta(t)=\delta^{'}(t)+\delta(t)+e^{-2t}u(t)$

$$\therefore\ g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\delta(t)+u(t)+\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau=\delta(t)+(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t})u(t)$$

2-10　一因果性的 LTI 系统，其输入、输出用下列微分—积分方程表示：

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求该系统的单位冲激 $h(t)$。

解：$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，$e(t)=\delta(t)$ 代入

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=f(t)*e(t)-e(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)-\delta(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

用算子表示为：$$(p+5)r(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)=(\frac{1}{p+1}+2)\delta(t)$$

$$H(p)=\frac{1}{p+5}(\frac{1}{p+1}+2)=\frac{1}{4}(\frac{1}{p+1}+\frac{7}{p+5})$$

$$\therefore\ h(t)=H(p)\delta(t)=(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t})u(t)$$

2-12　有一系统对激励为 $e_1=u(t)$ 时的完全响应为 $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$，对激励为 $e_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $r_2(t)=\delta(t)$.

(1)　求该系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$；

(2)　系统的起始状态保持不变，求其对于及激励为 $e_3(t)=e^{-t}u(t)$ 的完全响应 $r_3(t)$。

解：(1)　$\because r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

$$\Rightarrow\ \begin{aligned}r_1(t)&=r_{zi}(t)+r_{zs1}(t)\\ r_2(t)&=r_{zi}(t)+r_{zs2}(t)\end{aligned}$$

由题知：$$r_{zs2}(t)=\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

$$r_1(t)-r_2(t)=r_{zs1}(t)-r_{zs2}(t)=r_{zs1}(t)-\frac{d}{dt}r_{zs1}(t)$$

用算子表示为：$r_1(t)-r_2(t)=(1-p)r_{zs1}(t)=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$

即：$$r_{zs1}(t)=\frac{1}{1-p}(\frac{2}{p+1}-1)\delta(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\therefore\ r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zs1}(t)=e_1(t)*h(t)=\frac{1}{p}\delta(t)H(p)=\frac{1}{p+1}\delta(t)$$

$$\Rightarrow H(p)=\frac{1}{p+1}\div\frac{1}{p}=\frac{p}{p+1}$$

$\therefore$系统的零输入响应为 $r_{zi}(t)=r_1(t)-r_{zs1}(t)=e^{-t}u(t)$

（2）$e_3(t)=e^{-t}u(t)$

$$r_{zs3}(t)=H(p)e_3(t)=\frac{p}{p+1}\frac{1}{p+1}\delta(t)=(e^{-t}-te^{-t})u(t)$$

$$\Rightarrow r_3(t)=r_{zi}+r_{zs3}=(2-t)e^{-t}u(t)$$

2-13　求下列各函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积 $f_1(t)*f_2(t)$

（1）　$f_1(t)=u(t),\ f_2(t)=e^{-at}u(t)$

（2）　$f_1(t)=\delta(t),\ f_2(t)=\cos(\omega t+45°)$

（3）　$f_1(t)=(1+t)[u(t)-u(t-1)],\ f_2(t)=u(t-1)-u(t-2)$

（4）　$f_1(t)=\cos(\omega t),\ f_2(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1)$

（5）　$f_1(t)=e^{-\alpha t}u(t),\ f_2(t)=\sin tu(t)$

解：（1）$f_1(t)*f_2(t)=u(t)*e^{-\alpha t}u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$

$$=\int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

（2）$f_1(t)*f_2(t)=\delta(t)*\cos(\omega t+45^{\circ})=\cos(\omega t+45^{\circ})$

（3）
$$f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0,t<1,t>3\\ \int_1^t(1+t-\tau)d\tau,1<t<2\\ \int_{t-1}^2(1+t-\tau)d\tau,2<t<3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0,t<1,t>3\\ \frac{1}{2}(t^2-1),1<t<2\\ -\frac{1}{2}t^2+t+\frac{3}{2},2<t<3\end{cases}$$

（4）$f_1(t)*f_2(t)=\cos(\omega t)*[\delta(t+1)-\delta(t-1)]=\cos[\omega(t+1)]-\cos[\omega(t-1)]$

（5）$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)\sin(t-\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{-\alpha\tau}\sin(t-\tau)d\tau$

$$=\frac{\alpha\sin t-\cos t+e^{-\alpha t}}{\alpha^2+1}u(t)$$

2-14 求下列两组卷积，并注意相互间的区别

（1）$f(t)=u(t)-u(t-1)$，求 $s(t)=f(t)*f(t)$

（2）$f(t)=u(t-1)-u(t-2)$，求 $s(t)=f(t)*f(t)$

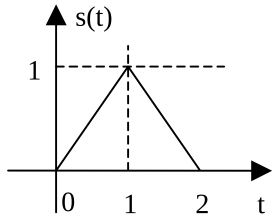
解：（1）$s(t)=f(t)*f(t)=[u(t)-u(t-1)]*[u(t)-u(t-1)]$

$$=pf(t)*\frac{1}{p}f(t)=[\delta(t)-\delta(t-1)]*\{t[u(t)-u(t-1)]+u(t-1)\}$$

$$=t[u(t)-u(t-1)]+u(t-1)-(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]-u(t-2)$$

$$=t[u(t)-u(t-1)]+(2-t)[u(t-1)-u(t-2)]$$

s(t)波形如图:

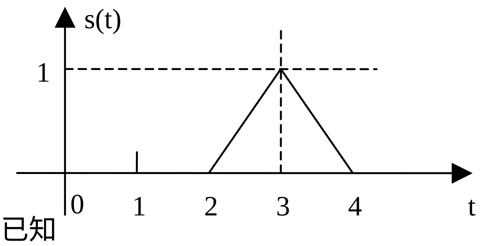


(2) $s(t)=f(t)*f(t)=[u(t-1)-u(t-2)]*[u(t-1)-u(t-2)]$

$$=pf(t)*\frac{1}{p}f(t)=[\delta(t-1)-\delta(t-2)]*\{(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]+u(t-2)\}$$

$$=(t-2)[u(t-2)-u(t-3)]+(4-t)[u(t-3)-u(t-4)]$$

s(t)波形如图：



2-15　已知

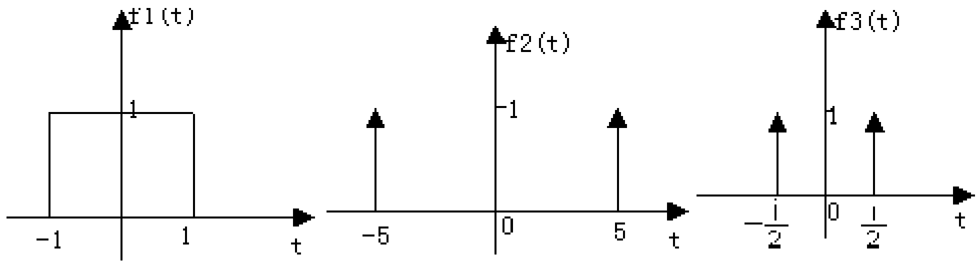
$f_1(t)=u(t+1)-u(t-1), f_2(t)=\delta(t+5)+\delta(t-5), f_3(t)=\delta(t+\frac{1}{2})+\delta(t-\frac{1}{2})$，画出下列各卷积波形

(1) $s_1(t)=f_1(t)*f_2(t)$

(2) $s_2(t)=f_1(t)*f_2(t)*f_2(t)$

(3) $s_3(t)=\{[f_1(t)*f_2(t)][u(t+5)-u(t-5)]\}*f_2(t)$

(4) $s_4(t)=f_1(t)*f_3(t)$]



(1) $s_1(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1(t+5)+f_1(t-5)$

(2) $s_1(t)=f_1(t)*f_2(t)*f_2(t)=[f_1(t+5)+f_1(t-5)]*f_2(t)$

$$=f_1(t+10)+2f_1(t)+f_1(t-10)$$

(3) $s_3(t)=\{[f_1(t)*f_2(t)][u(t+5)-u(t-5)]\}*f_2(t)$

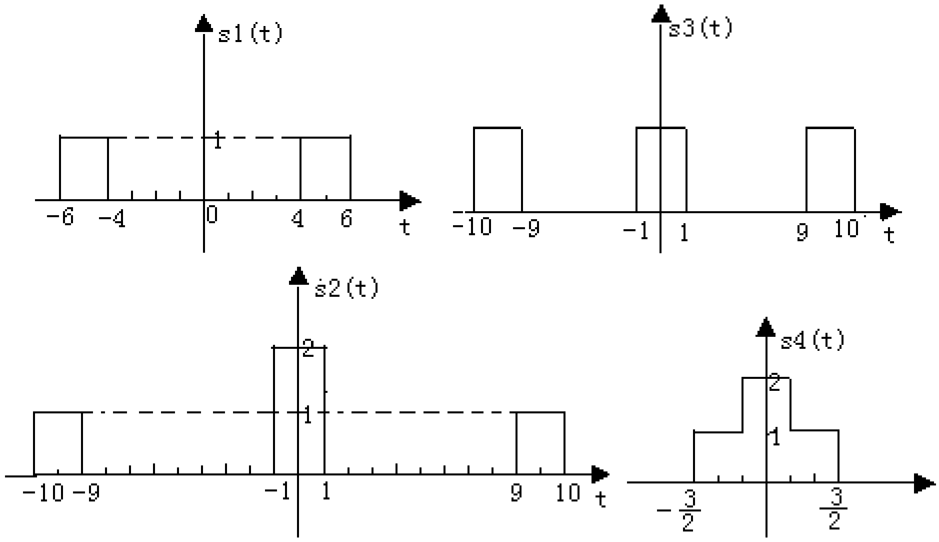
$$=[f_1(t+5)+f_1(t-5)][u(t+5)-u(t-5)]*f_2(t)$$

$$=\{[u(t+5)-u(t+4)]+[u(t-4)-u(t-5)]\}*f_2(t)$$

$$=u(t+10)+u(t)-u(t+9)-u(t-1)+u(t+1)+u(t-9)-u(t)-u(t-10)$$

$$=u(t+10)-u(t+9)+u(t+1)-u(t-1)+u(t-9)-u(t-10)$$

(4) $s_4(t)=f_1(t)*f_3(t)=f_1(t+\frac{1}{2})+f_1(t-\frac{1}{2})$



2-17 已知某一 LTI 系统对输入激励 $e(t)$ 的零状态响应

$$r_{zs}(t)=\int_{t-2}^{\infty}e^{t-\tau}e(\tau-1)d\tau$$

求该系统的单位冲激响应。

解：设系统的单位冲激响应 h(t) 则：

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由题意有：$r_{zs}(t)=\int_{t-2}^{\infty}e^{t-\tau}e(\tau-1)d\tau \underline{\underline{令\tau-1=u}} \int_{t-3}^{\infty}\mathrm{e}^{t-u-1}e(u)du$

$$\underline{\underline{令u=\tau}} \int_{t-3}^{\infty}\mathrm{e}^{t-\tau-1}e(\tau)d\tau=\int_{t-3}^{\infty}e^{t-\tau-1}u[3-(t-\tau)]e(\tau)d\tau$$

$$=e^{(t-1)}u(3-t)*e(t)$$

$$\therefore h(t)=e^{(t-1)}u(3-t)$$

2-18 某 LTI 系统，输入信号 $e(t)=2e^{-3t}u(t)$，在该输入下的响应为 $r(t)$，即 $r(t)=H[e(t)]$，又已知

$$H[\frac{d}{dt}e(t)]=-3r(t)+e^{-2t}u(t)$$

求该系统的单位冲激响应为 $h(t)$。

解：对于 LTI 系统，若激励 e(t)对应于响应 r(t)=H[e(t)]，则激励 $\frac{d}{dt}e(t)$ 对应于响应

$$r(t)=h(t)*e(t)$$

$$r^{'}(t)=h(t)*e^{'}(t)$$

$$\frac{d}{dt}e(t)=-6e^{-3t}u(t)+2\delta(t)$$

$$\Rightarrow r^{'}(t)=\frac{d}{dt}r(t)=h(t)*[-6e^{-3t}u(t)+2\delta(t)]$$

$$=-3h(t)*e(t)+2h(t)$$

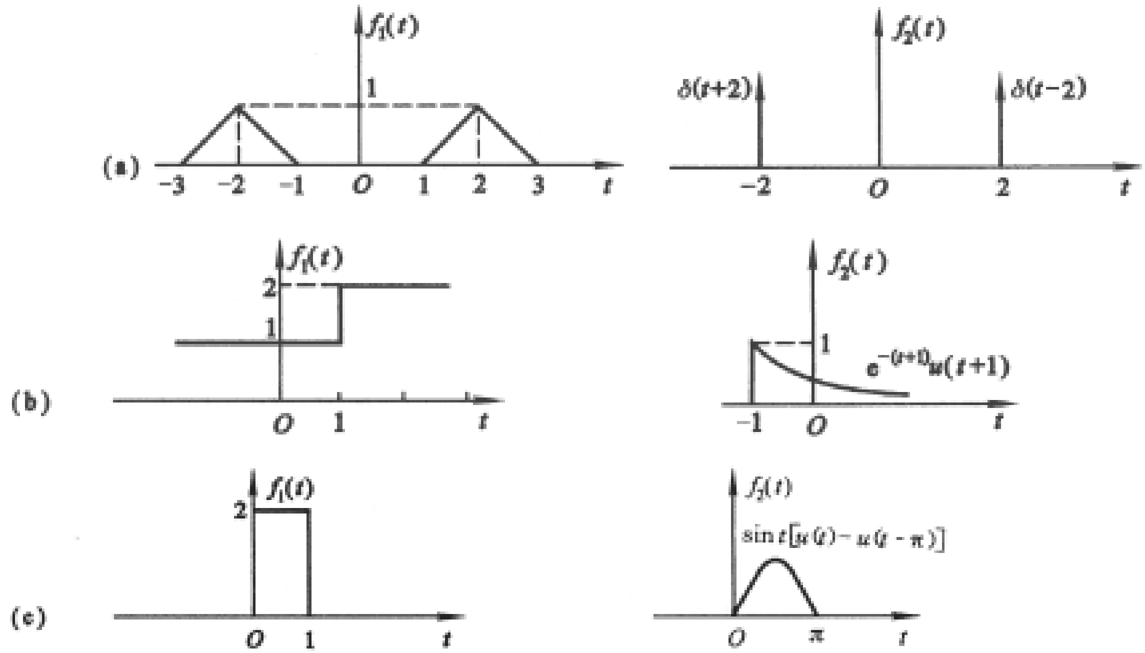
$$=-3r(t)+2h(t)$$

由题有：$\frac{d}{dt}r(t)=H[\frac{d}{dt}e(t)]$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}r(t) = -3r(t) + e^{-2t}u(t) = -3r(t) + 2h(t)$$

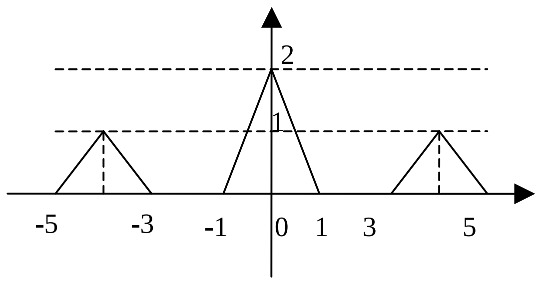
$$\therefore \quad h(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

2-19　对题图所示的各组函数，用图解的方法粗略画出 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 卷积的波形，并计算卷积积分 $f_1(t)*f_2(t)$。

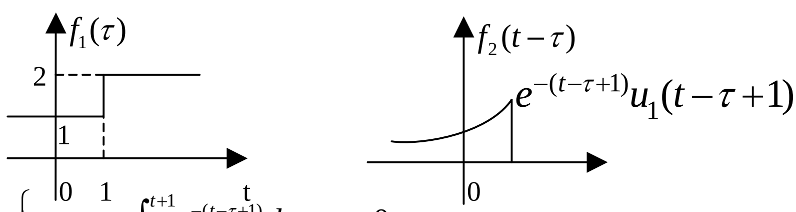


解：图(a)　$f_1(t)*f_2(t) = f_1(t)*[\delta(t+2)+\delta(t-2)] = f_1(t+2)+f_1(t-2)$

波形如图：



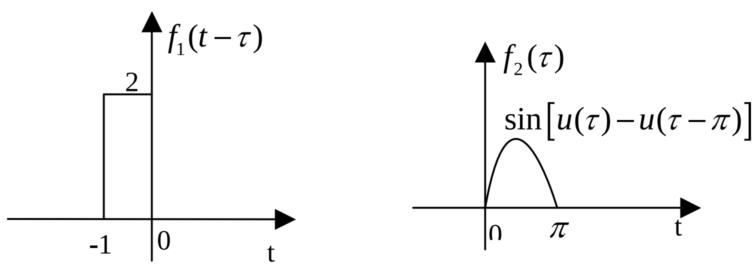
图(b)



$$f_1(t)*f_2(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t+1} e^{-(t-\tau+1)}d\tau, & t<0 \\ \int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^{-(t-\tau+1)}d\tau + \int_{1}^{t+1} 2e^{-(t-\tau+1)}d\tau, & t>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & t<0 \\ 2-\mathrm{e}^{-t}, & t>0 \end{cases} = u(-t) + (2-e^{-t})u(t)$$

图(c)：



$$f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0,\ t<0, t>\pi+1\\ \int_0^t 2\sin\pi \mathrm{d}\tau,\ \ 0<t<1\\ \int_{t-1}^t 2\sin\pi \mathrm{d}\tau,\ \ 1<t<\pi\\ \int_{t-1}^{\pi} 2\sin\pi d\tau,\ \ \pi<t<\pi+1\end{cases}=\begin{cases}0,\ t<0, t>\pi+1\\ 2(1-\cos t),\ \ 0<t<1\\ 2[\cos(t-1)-\cos t],\ \ 1<t<\pi\\ 2[\cos(t-1)+1],\ \pi<t<\pi+1\end{cases}$$

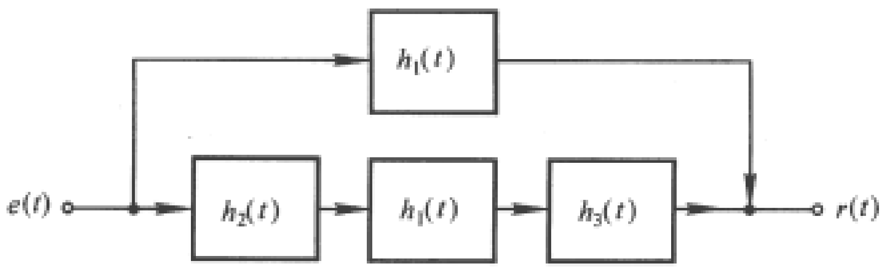
2-20 题图所示系统是由几个“子系统”组成，各子系统的冲激响应分别为：

$h_1(t)=u(t)$ （积分器）

$h_2(t)=\delta(t-1)$ （单位延时）

$h_3(t)=-\delta(t)$ （倒相器）

试求总的系统的冲激响应 $h(t)$。



题图 2－20

解：$h(t)=h_1(t)+h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)$

$=u(t)+\delta(t-1)*u(t)*[-\delta(t)]$

$=u(t)-u(t-1)$

2-21 已知系统的冲激响应 $h(t)=e^{-2t}u(t)$

（1） （1） 若激励信号为

$$e(t)=e^{-t}[u(t)-u(t-2)]+\beta\delta(t-2)$$

式中 β 为常数，试决定响应 $r(t)$。

（2） （2） 若激励信号表示为

$$e(t)=x(t)[u(t)-u(t-2)]+\beta\delta(t-2)$$

式中 $x(t)$ 为任意 t 函数，若要求系统在 t>2 的响应为零，试确定β值应等于多少

解：（1） $r(t)=h(t)*e(t)=e^{-2t}u(t)*e^{-t}[u(t)-u(t-2)]+e^{-2t}u(t)*\beta\delta(t-2)$

$$=\int_0^t e^{-2\tau}u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau-\int_0^{t-2}e^{-2\tau}u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau-2)d\tau+\beta e^{-2(t-2)}u(t-2)$$

$$=e^{-t}[\int_0^t e^{-\tau}d\tau u(t)-\int_0^{t-2}e^{-\tau}d\tau u(t)+\beta e^{-2(t-2)}u(t-2)$$

当 $0<t<2$ 时， $r(t)=e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau=e^{-t}-e^{-2t}$

当 $t>2$ 时， $r(t)=e^{-t}[(1-e^{-t})-(1-e^{-(t-2)})]+\beta e^{-2(t-2)}$

$$=e^{-2t}(\beta e^4+e^2-1)$$

(2) $r(t)=h(t)*e(t)=e^{-2t}u(t)*x(t)[u(t)-u(t-2)]+e^{-2t}u(t)*\beta\delta(t-2)$

$$=\int_0^t e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)x(\tau)u(\tau)d\tau-\int_2^t e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)x(\tau)u(\tau-2)d\tau$$
$$+\beta e^{-2(t-2)}u(t-2)$$

$$=\int_0^t e^{-2(t-\tau)}x(\tau))d\tau u(t)-\int_2^t e^{-2(t-\tau)}x(\tau)d\tau u(t-2)+\beta e^{-2(t-2)}u(t-2)$$

由题意有， 当 $t>2$ 时， $r(t)=0$

$$\mathrm{r(t)}=\int_0^t e^{-2(t-\tau)}x(\tau))d\tau u(t)-\int_2^t e^{-2(t-\tau)}x(\tau)d\tau u(t-2)+\beta e^{-2(t-2)}u(t-2)$$
$$=\int_0^2 e^{-2(t-\tau)}x(\tau)d\tau+\beta e^{-2(t-2)}u(t-2)=0$$

$\therefore$ $\beta=-e^{-4}\int_0^2 e^{2\tau}x(\tau)d\tau$

2-23 化简下列两式：

(1) $\delta(2t^2-\frac{1}{2})$；

令 $f(t)=2t^2-\frac{1}{2}=0$ 则： $t_1=\frac{1}{2}$ $\mathrm{t}_2=-\frac{1}{2}$

$f'(t_1)=2$ $\mathrm{f}'(t_2)=-2$

$$\therefore\ \delta(2t^2-\frac{1}{2})=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\left|f'(t_i)\right|}\delta(t-t_i)=\frac{1}{2}\delta(t^2-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}[\delta(t-\frac{1}{2})+\delta(t+\frac{1}{2})]$$

(2) $\delta(\sin t)$。

令 $\sin t=0\Rightarrow t=k\pi$ $(\mathrm{k}=0,\pm1,\pm2,\ \ldots\ldots)$

$$\therefore\ \ \delta(\mathrm{sint})=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(\mathrm{t-k}\pi)$$

2-27 试求下列各值，设系统起始状态为零：

(1) $\frac{A}{p+\alpha}\delta(t)$ (2) $\frac{A}{(p+\alpha)^2}\delta(t)$ (3) $\frac{A}{(p+\alpha)(p+\beta)}\delta(t)$

解：(1) $\frac{A}{p+\alpha}\delta(t)=Ae^{-\alpha t}u(t)$

(2) $\frac{A}{(p+\alpha)^2}\delta(t)=[\frac{A}{(p+\alpha)^2}+\frac{0}{p+\alpha}]\delta(t)=Ate^{-\alpha t}u(t)$

(3) $\frac{A}{(p+\alpha)(p+\beta)}\delta(t)=\frac{A}{\beta-\alpha}(\frac{1}{p+\alpha}-\frac{1}{p+\beta})\delta(t)=\frac{A}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$

2-6 解题过程：

（1）$e(t)=u(t)$，$r(0_-)=1$，$r^{'}(0_-)=2$

方法一：经典时域法：

①求 r_{Zi}：由已知条件，有$\begin{cases} r_{Zi}^{''}(t)+3r_{Zi}^{'}(t)+2r_{Zi}(t)=0 \\ r_{Zi}^{'}(0_+)=r_{Zi}^{'}(0_-)=2 \\ r_{Zi}^{'}(0_+)=r_{Zi}^{'}(0_-)=1 \end{cases}$

特征方程：$\alpha^2+3\alpha+2=0$ 特征根为：$\alpha_1=-1$，$\alpha_2=-2$

故 $r_{Zi}(t)=\left(A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}\right)u(t)$，代入 $r_{Zi}^{'}(0_+)$，$r_{Zi}(0_+)$ 得 $A_1=4$，$A_2=-3$

故 $r_{Zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$

②求 r_{Zs}： 将 $e(t)=u(t)$ 代入原方程，有 $r_{Zs}^{''}(t)+3r_{Zs}^{'}(t)+2r_{Zs}(t)=\delta(t)+3u(t)$

用冲激函数匹配法，设$\begin{cases} r_{Zs}^{''}(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t) \\ r_{Zs}^{'}(t)=a\Delta u(t) \\ r_{Zs}(t)=at\Delta u(t) \end{cases}$

代入微分方程，平衡 $\delta(t)$ 两边的系数得 $a=1$

故 $r_{Zs}^{'}(0_+)=r_{Zs}^{'}(0_-)+1=1$，$r_{Zs}(0_+)=r_{Zs}(0_-)=0$

再用经典法求 $r_{Zs}(t)$：齐次解 $r_{Zsh}(t)=\left(B_1e^{-t}+B_2e^{-2t}\right)u(t)$

因为 $e(t)=u(t)$ 故设特解为 $r_{Zsp}(t)=C\cdot u(t)$，代入原方程得 $C=\dfrac{3}{2}$

故 $r_{Zs}(t)=r_{Zsh}(t)+r_{Zsp}(t)=\left(B_1e^{-t}+B_2e^{-2t}+\dfrac{3}{2}\right)u(t)$

代入 $r_{Zs}^{'}(0_+)$，$r_{Zs}(0_+)$ 得 $B_1=-2$，$B_2=\dfrac{1}{2}$

故 $r_{Zs}(t)=\left(-2e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}+\dfrac{3}{2}\right)u(t)$

③全响应：$r(t)=r_{Zi}(t)+r_{Zs}(t)=\left(2e^{-t}-\dfrac{5}{2}e^{-2t}+\dfrac{3}{2}\right)u(t)$

自由响应：$\left(2e^{-t}-\dfrac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

受迫响应：$\frac{3}{2}u(t)$

方法二：p 算子法

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$$

化为算子形式为：$\left(p^2+3p+2\right)r(t)=(p+3)e(t)$

特征方程：$\alpha^2+3\alpha+2=0$ 特征根为：$\alpha_1=-1$，$\alpha_2=-2$

$r_{Zi}(t)$的求法与经典时域法一致，$r_{Zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$

再求$r_{Zs}(t)$：$e(t)=u(t)$，$r(t)=\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}u(t)=(p+3)\left[e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t)*u(t)\right]$

其中$e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t)*u(t)=\int_0^t\left(e^{-\tau}-e^{-2\tau}\right)d\tau=\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

$\therefore r_{Zs}(t)=(p+3)\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)=\left(-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right)u(t)$

$\therefore$ 全响应$r(t)=r_{Zi}(t)+r_{Zs}(t)=\left(2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{3}{2}\right)u(t)$

自由响应：$\left(2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

受迫响应：$\frac{3}{2}u(t)$

综观以上两种方法可发现 p 算子法更简洁，准确性也更高

（2）$e(t)=e^{-3t}u(t)$，$r(0_-)=1$，$r^{'}(0_-)=2$

运用和上题同样的方法，可得

全响应$r(t)=\left(5e^{-t}-4e^{-2t}\right)u(t)$

零输入响应：$r_{Zi}(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)u(t)$

零状态响应：$r_{Zs}(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

自由响应：$\left(5e^{-t}-4e^{-2t}\right)u(t)$

受迫响应：0

2-10 分析：

$$\frac{d}{dx}r(t)+5r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)=e(t)*f(t)-e(t)=e(t)*\left[f(t)-\delta(t)\right]$$

已知冲激函数$\delta(t)$与单位冲激响应$h(t)$为“输入——输出”对，故$e(t)=\delta(t)$时，

$r(t)=h(t)$。类似上题，也可以用经典法和算子法两种思路求解该微分方程。

解题过程：方法一：经典法

代入$e(t)=\delta(t)$，$f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$得到

$$\frac{d}{dt}h(t)+5h(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)\cdots\cdots(*)$$

对于因果系统$h(0_-)=0$

先求满足$\frac{d}{dt}h_1(t)+5h_1(t)=\delta(t)$的$h_1(t)$：$h_1(t)=Ae^{-5t}u(t)$

利用冲激函数匹配法，在$(0_-,0_+)$时间段内

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}h_1(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)\\ h_1(t)=a\Delta u(t)\end{cases}\quad(0_-<t<0_+)$$

$$\Rightarrow a\delta(t)+b\Delta u(t)+5a\Delta u(t)=\delta(t)$$
$$\Rightarrow a=1,b=-5$$
$$\Rightarrow h_1(0_+)=a+h(0_-)=A=1$$
$$\Rightarrow h_1(t)=e^{-5t}u(t)$$

对于$(*)$式：

$$h(t)=h_1(t)*\left[e^{-t}u(t)+2\delta(t)\right]=e^{-5t}u(t)*e^{-t}u(t)+2e^{-5t}u(t)=\left(\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{4}e^{-5t}\right)u(t)$$

方法二：p算子法

（常用关系式：①$\frac{dx(t)}{dt}=px(t)$，②$e^{-\lambda t}u(t)=\frac{1}{p+\lambda}\delta(t)$

③$\frac{1}{p+\lambda}x(t)=\frac{1}{p+\lambda}\left[\delta(t)*x(t)\right]=\left[\frac{1}{p+\lambda}\delta(t)\right]*x(t)=e^{-\lambda t}u(t)*x(t)$）

引入微分算子p，$(*)$式变成：

$$(p+5)h(t)=\frac{1}{p+1}\delta(t)+2\delta(t)$$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{1}{p+5}\cdot\frac{1}{p+1}\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)=\left(\frac{-\frac{1}{4}}{p+5}+\frac{\frac{1}{4}}{p+1}\right)\delta(t)+\frac{2}{p+5}\delta(t)$$

$$\Rightarrow h(t)=\left(\frac{7}{4}e^{-5t}+\frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$$

注：由本例再次看到，相比经典法，p 算子法形式简洁，易算易记。

2-14 分析：求解两个信号的卷积，可以直接用定义，依照“反转$\rightarrow$平移$\rightarrow$相乘$\rightarrow$求和”的顺序来求，积分式为 $x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$，但是这种依靠定义的基本方法可能不是最简便的。更应该注意灵活运用卷积的性质（卷积的交换律、结合律、分配律；卷积的微分与积分；与冲激函数或阶跃函数的卷积）对表达式进一步的化简，甚至直接得到结果。

解题过程：

（1） $f(t)=u(t)-u(t-1)=u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]*u(t)*\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]\\&=\left[u(t)*u(t)\right]*\left[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)\right]\\&=tu(t)*\left[\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2)\right]\\&=tu(t)-2(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2)\end{aligned}$$

（2） $f(t)=u(t-1)-u(t-2)=u(t)*\left[\delta(t-1)-\delta(t-2)\right]$

$$\begin{aligned}\therefore s(t)=f(t)*f(t)&=u(t)*\left[\delta(t-1)-\delta(t-2)\right]*u(t)*\left[\delta(t-1)-\delta(t-2)\right]\\&=\left[u(t)*u(t)\right]*\left[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)\right]\\&=tu(t)*\left[\delta(t-2)-2\delta(t-3)+\delta(t-4)\right]\\&=(t-2)u(t-2)-2(t-3)u(t-3)+(t-4)u(t-4)\end{aligned}$$

注：可见（2）中的$s(t)$是（1）中$s(t)$右移两位，不难推出如下结论：

$$s_1(t)=x_1(t)*x_2(t)$$

$$s_2(t)=x_1(t-t_1)*x_2(t-t_2)=s_1(t-t_1-t_2)\qquad(t_1\geq 0,t_2\geq 0)$$

2.15 分析：利用卷积的性质：$f(t)*\left[\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)\right]=f(t+t_0)+f(t-t_0)$可画出如下波形：

（1） $s_1(t)=f_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*\left[\delta(t+5)+\delta(t-5)\right]=f_1(t+5)+f_2(t-5)$

（2） $s_2(t)=f_1(t)*f_2(t)*f_2(t)=f_1(t)*\left[\delta(t+5)+\delta(t-5)\right]\left[\delta(t+5)+\delta(t-5)\right]$

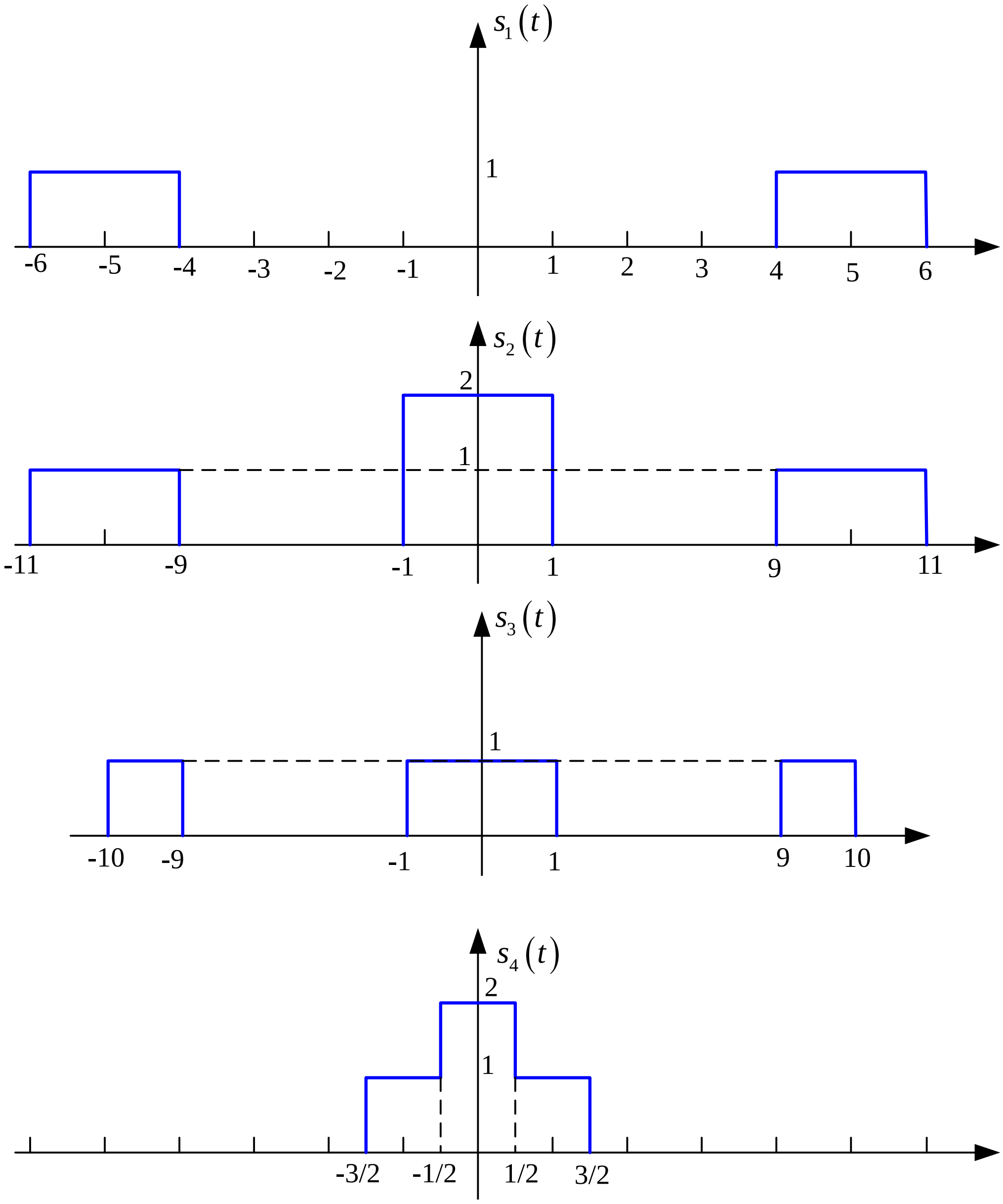
$= f_1(t)*\left[\delta(t+10)+2\delta(t)+\delta(t-10)\right]$

$= f_1(t+10)+2f_1(t)+f_1(t-10)$

（3）$s_3(t)=\left\{\left[f_1(t)*f_2(t)\right]\left[u(t+5)-u(t-5)\right]\right\}*f_2(t)$

由（1）得 $f_1(t)*f_2(t)=s_1(t)$，$\left[u(t+5)-u(t-5)\right]$相当于一个“时间窗”，保留$(-5,5)$内的信号，其它范围内的信号为 0。

（4）$s_4(t)=f_1(t)*f_3(t)$　发生时域信号的叠加



2-18 分析：本题可以用经典法、算子法或者直接用 LTI 系统的性质求解

解题过程：

方法一：经典法

$\because r(t)=H\left[e(t)\right]=e(t)*h(t)$，$H\left[\frac{d}{dt}e(t)\right]=\frac{d}{dt}\left\{H\left[e(t)\right]\right\}=\frac{d}{dt}r(t)$

$\therefore$ 得到微分方程：$\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=e^{-2t}u(t)$

此方程齐次解 $r_n(t)=Ae^{-3t}u(t)$，特解 $r_p(t)=Be^{-2t}u(t)$

将 $r_p(t)$ 代入上式得到 $B=1$，即 $r_p(t)=e^{-2t}u(t)$

由于 $r(t)$ 是零状态响应，且方程右端无冲激项，故 $r(0_+)=0$，将此初始条件代入

$r(t)=r_h(t)+r_p(t)=\left(Ae^{-3t}+e^{-2t}\right)u(t)$ 得 $A=-1$

$\therefore r(t)=\left(-e^{-3t}+e^{-2t}\right)u(t)$

又 $\because r(t)=e(t)*h(t)$

$\therefore e(t)*h(t)=\left[2e^{-3t}u(t)\right]*h(t)=\left(-e^{-3t}+e^{-2t}\right)u(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又 $\frac{d}{dt}\left[e(t)*h(t)\right]=\left[\frac{d}{dt}e(t)\right]*h(t)=\frac{d}{dt}r(t)$

$\therefore\left[-6e^{-3t}u(t)+2\delta(t)\right]*h(t)=\left(3e^{-3t}-2e^{-2t}\right)u(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

（1）*3+（2）得 $\delta(t)*h(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$

即 $h(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$

方法二：p 算子法

$r(t)=H\left(e(t)\right)$

$H\left[\frac{d}{dt}e(t)\right]=H\left[pe(t)\right]=pH\left[e(t)\right]=pr(t)=-3r(t)+e^{-2t}u(t)$

$\therefore(p+3)r(t)=e^{-2t}u(t)$

$\therefore r(t)=\frac{1}{p+3}e^{-2t}u(t)*e^{-2t}u(t)=2e^{-3t}u(t)*\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

又 $\because r(t)=\therefore e(t)*h(t)=2e^{-3t}u(t)*h(t)\cdots\cdots\cdots(4)$

由(3)(4)对比可知 $h(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$

方法三：直接利用 LTI 系统的性质

$$H\left(e(t)\right)=r(t)\Rightarrow H\left[2e^{-3t}u(t)\right]=r(t)$$

$$H\left(\frac{d}{dx}e(t)\right)=H\left[2\delta(t)-6e^{-3t}u(t)\right]=-3r(t)+e^{2t}u(t)\cdots\cdots\cdots(5)$$

（4）*3+（5）$\Rightarrow h(t)=H\left[\delta(t)\right]=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$

2-20 解题过程：由系统框图知，$r(t)=e(t)*h_1(t)+e(t)*h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)$

$$=e(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)\right]$$
$$=e(t)*h(t)$$

$$\therefore h(t)=h_1(t)+h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)$$

其中，$h_1(t)=u(t)$，$h_2(t)*h_1(t)*h_3(t)=\delta(t-1)*u(t)*\left[-\delta(t)\right]=-u(t-1)$

$\therefore h(t)=u(t)-u(t-1)$

3-1 解题过程：

（1）三角形式的傅立叶级数（Fourier Series，以下简称 FS）

$$f\left(t\right)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\left(n\omega_1 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_1 t\right)\right]$$

式中 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$， n 为正整数，T_1 为信号周期

（a）直流分量 $$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f\left(t\right)dt$$

（b）余弦分量的幅度 $$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f\left(t\right)\cos\left(n\omega_1 t\right)dt$$

（c）正弦分量的幅度 $$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f\left(t\right)\sin\left(n\omega_1 t\right)dt$$

（2）指数形式的傅立叶级数

$$f\left(t\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F\left(n\omega_1\right)e^{jn\omega_1 t}$$

其中复数频谱 $F_n=F\left(n\omega_1\right)=\dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_1}f\left(t\right)e^{-jn\omega_1 t}dt$

$F_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n-jb_n\right)$ $\qquad F_{-n}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+jb_n\right)$

由图 3-1 可知， $f\left(t\right)$ 为奇函数，因而 $a_0=a_n=0$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f\left(t\right)\sin\left(n\omega_1 t\right)dt=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{E}{2}\sin\left(n\omega_1 t\right)dt=\frac{-2E}{n\omega_1 t}\cos\left(n\omega_1 t\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}}=\frac{E}{n\pi}\left[1-\cos\left(n\pi\right)\right]$$

$$=\begin{cases}0 & n=2,4,\cdots\\ \dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,\cdots\end{cases}$$

所以，三角形式的 FS 为

$$f\left(t\right)=\frac{2E}{\pi}\left[\sin\left(\omega_1 t\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\omega_1 t\right)+\frac{1}{5}\sin\left(5\omega_1 t\right)+\cdots\right]\qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

指数形式的 FS 的系数为

$$F_n=-\frac{1}{2}jb_n=\begin{cases}0 & n=0,\pm2,\pm4,\cdots\\ -\dfrac{jE}{n\pi} & n=0,\pm1,\pm3,\cdots\end{cases}$$

所以，指数形式的 FS 为

$$f(t)=-\frac{jE}{\pi}e^{j\omega_1 t}+\frac{jE}{\pi}e^{-j\omega_1 t}-\frac{jE}{3\pi}e^{j3\omega_1 t}+\frac{jE}{3\pi}e^{-j3\omega_1 t}+\cdots \qquad \omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

3-15 分析：半波余弦脉冲的表达式 $f(t)=E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$

求 $f(t)$ 的傅立叶变换有如下两种方法。

解题过程：

方法一：用定义

$$F(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{E}{2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)t}+e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)t}\right]dt$$

$$=\frac{E}{2j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)\frac{\tau}{2}}-e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)\frac{\tau}{2}}\right]-\frac{E}{2j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)}\left[e^{-j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)\frac{\tau}{2}}-e^{j\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)\frac{\tau}{2}}\right]$$

$$=\frac{E\cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\frac{\pi}{\tau}-\omega}+\frac{E\cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\frac{\pi}{\tau}+\omega}$$

$$=\frac{2E\tau\cos\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\pi\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

方法二：用 FT 的性质和典型的 FT 对

$$f(t)=E\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$$F(\omega)=\frac{E}{2\pi}\mathscr{F}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]*\mathscr{F}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

其中 $\mathscr{F}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]=\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]$，

$$\mathscr{F}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

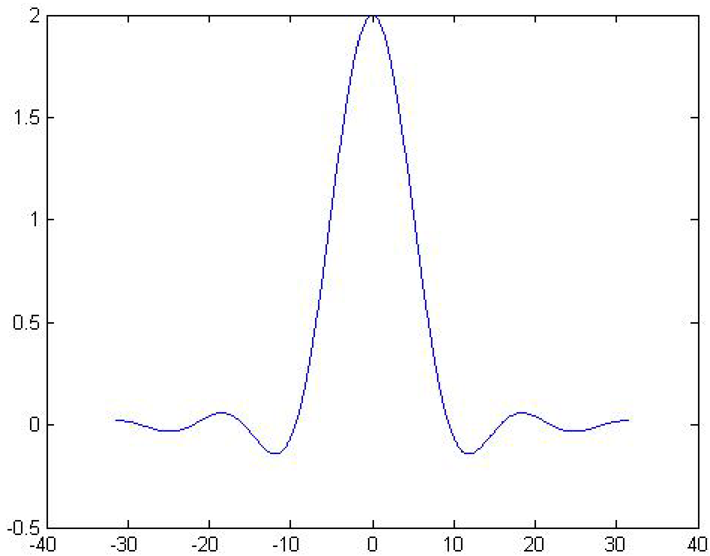
代入 $F(\omega)=\frac{E}{2\pi}\mathscr{F}\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right]*\mathscr{F}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$ 得

$$F(\omega)=\frac{E}{2\pi}\cdot\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]*\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$=E\left\{\frac{\sin\left[\frac{\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\tau}{2}\right]}{\omega+\frac{\pi}{\tau}}+\frac{\sin\left[\frac{\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\tau}{2}\right]}{\omega-\frac{\pi}{\tau}}\right\}$$

$$=\frac{2E\tau\cos\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\pi\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

其频谱图如下图所示：



3-19 分析：本题意在说明：对于两频域信号，如果其幅频特性相同，但是相频特性不同则它们对应的时域信号是不一样的。

解题过程：

（a） $|F(\omega)|=A\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$， $\varphi(\omega)=\omega t_0\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

所以， $F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=Ae^{j\omega t_0}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

先求 $F_1(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$ 的 FT： $f_1(t)$

由 $\mathscr{F}\left[Sa(\omega_c t)\right]=\frac{\pi}{\omega_c}\left[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)\right]$

可知 $\mathscr{F}^{-1}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]=\dfrac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)$

再由FT的平移性质：$f(t)=\mathscr{F}\left\{Ae^{j\omega t_0}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]\right\}=\dfrac{A\omega_0}{\pi}Sa\left[\omega_0(t+t_0)\right]$

（b）$\left|F(\omega)\right|=A\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right]+\frac{\pi}{2}\left[u(\omega)-u(\omega-\omega_0)\right]$$

所以，$F(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}=Ae^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right]+Ae^{j\frac{\pi}{2}}\left[u(\omega)-u(\omega-\omega_0)\right]$

$$=-jA\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega)\right]+jA\left[u(\omega)-u(\omega-\omega_0)\right]$$

欲求 $F(\omega)$ 的反变换，可利用 FT 的频域微分性质：

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=-jA\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega)\right]+jA\left[\delta(\omega)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

另 $f_1(t)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)\right\}=-\dfrac{jA}{2\pi}\left[e^{-j\omega_0 t}-1\right]+\dfrac{jA}{2\pi}\left[1-e^{j\omega_0 t}\right]$

$$=\frac{jA}{2\pi}\left(2-e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)=\frac{jA}{\pi}\left(1-\cos\omega_0 t\right)$$

由 FT 的频域微分性质，有 $f(t)=\dfrac{f_1(t)}{-jt}=\dfrac{A}{\pi t}\left(\cos\omega_0 t-1\right)=\dfrac{-2A}{\pi t}\sin^2\left(\dfrac{\omega_0 t}{2}\right)$

3-22 分析：FT 的时域对称性：若 $F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]$，则 $\mathscr{F}\left[F(t)\right]=2\pi f(-\omega)$

（1）$\because\delta(t)\leftrightarrow 1$，$\delta(t+\omega_0)\leftrightarrow e^{j\omega_0\omega}$

$\therefore$ 由 FT 的时频对称性，有 $e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega+\omega_0)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\therefore$ $F(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$ 的时间函数 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$

（2）$\because u(t+\omega_0)-u(t-\omega_0)\leftrightarrow 2\omega_0 Sa(\omega_0\omega)$

$\therefore$ 由 FT 的时频对称性，有

$$2\omega_0 Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow 2\pi\left[u(-\omega+\omega_0)-u(-\omega-\omega_0)\right]=2\pi\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$$

即 $\dfrac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$

$\therefore$ $F(\omega)=u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)$ 的时间函数 $f(t)=\dfrac{\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)$

（3）$F(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\omega_0}{\pi} & \left(\left|\omega\right|\le\omega_0\right)\\ 0 & others\end{cases}=\dfrac{\omega_0}{\pi}\left[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)\right]$

利用（2）的结论，$F\left(\omega\right)$的时间函数 $f\left(t\right)=\dfrac{\omega_0^2}{\pi^2}Sa\left(\omega_0 t\right)$

3-32 解题过程：利用性质：$\mathscr{F}\left(x\left(t\right)\cdot y\left(t\right)\right)=\dfrac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left[x\left(t\right)\right]*\mathscr{F}\left[y\left(t\right)\right]$

$$\mathscr{F}\left[\sin\left(\omega_0 t\right)u\left(t\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\left[\sin\left(\omega_0 t\right)\right]*\mathscr{F}\left[u\left(t\right)\right]$$

单边正弦函数的 FT：$=\dfrac{1}{2\pi}\cdot j\pi\left[\delta\left(\omega+\omega_0\right)-\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right]*\left[\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta\left(\omega\right)\right]$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\delta\left(\omega+\omega_0\right)+\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

4-2 解题过程：

（1）由 $f\left(t\right)=\sin wt\left[u\left(t\right)-u\left(t-T/2\right)\right]=\sin wtu\left(t\right)+\sin\left[w(t-T/2)\right]u\left(t-T/2\right)$ 得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f\left(t\right)\right]&=\mathscr{L}\left[\sin wtu\left(t\right)\right]+\mathscr{L}\left\{\sin\left[w(t-T/2)\right]u\left(t-T/2\right)\right\}\\&=\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}+\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{sT}{2}}\\&=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{sT}{2}}\right)\end{aligned}$$

（2）由 $\sin\left(wt+\varphi\right)=\sin wt\cos\varphi+\cos wt\sin\varphi$ 得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\sin\left(wt+\varphi\right)\right]&=\mathscr{L}\left(\sin wt\cos\varphi\right)+\mathscr{L}\left(\cos wt\sin\varphi\right)\\&=\frac{\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}+\frac{s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}\\&=\frac{\omega\cos\varphi+s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

4-3 解题过程：

（1）由 $f\left(t\right)=e^{-(t-2)}u\left(t-2\right)\cdot e^{-2}$ 得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[f\left(t\right)\right]&=e^{-2}\mathscr{L}\left[e^{-(t-2)}u\left(t-2\right)\right]\\&=e^{-2}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot e^{-2s}\\&=\frac{1}{s+1}e^{-2(s+1)}\end{aligned}$$

（2）$\mathscr{L}\left[f\left(t\right)\right]=\dfrac{1}{s+1}e^{-2s}$

（3）由 $f\left(t\right)=e^{-t}u\left(t\right)\cdot e^{2}$ 得

$$\mathscr{L}\left[f\left(t\right)\right]=e^2\mathscr{L}\left[e^{-t}u\left(t\right)\right]=\frac{e^2}{s+1}$$

（4）由 $f\left(t\right)=\sin\left[2\left(t-1\right)+2\right]u\left(t-1\right)$

$$=\cos 2\sin\left[2\left(t-1\right)\right]u\left(t-1\right)+\sin 2\cos\left[2\left(t-1\right)\right]u\left(t-1\right)$$ 得

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\cos 2\mathscr{L}\left\{\sin\left[2(t-1)\right]u(t-1)\right\}+\sin 2\mathscr{L}\left\{\sin\left[2(t-1)\right]u(t-1)\right\}$$
$$=\frac{2\cos 2}{s^2+4}e^{-s}+\frac{s\sin 2}{s^2+4}e^{-s}$$
$$=\frac{2\cos 2+s\sin 2}{s^2+4}e^{-s}$$

（5）由 $f(t)=(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)-u(t-2)$ 得

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=\mathscr{L}\left[(t-1)u(t-1)\right]-\mathscr{L}\left[(t-2)u(t-2)\right]-\mathscr{L}\left[u(t-2)\right]$$
$$=\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s^2}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-s}$$
$$=\frac{1}{s^2}\left[1-(1+s)e^{-s}\right]$$

4-4 解题过程：

（1）$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)=e^{-t}$

（2）由 $\frac{4}{2s+3}=\frac{2}{s+\frac{3}{2}}$ 得 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{2s+3}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+\frac{3}{2}}\right]=2e^{-\frac{3}{2}t}$

（3）由 $\frac{4}{s(2s+3)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right)$ 得 $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(2s+3)}\right]=\frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right]$

（4）由 $\frac{1}{s(s^2+5)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+5}\right)$ 得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+5)}\right]=\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+5}\right]=\frac{1}{5}\left(1-\cos\sqrt{5}t\right)$$

（5）由 $\frac{3}{(s+4)(s+2)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+4}\right)$ 得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+4)(s+2)}\right]=\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]-\frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]=\frac{3}{2}\left(e^{-2t}-e^{-4t}\right)$$

（6）由 $\frac{3s}{(s+4)(s+2)}=\frac{6}{s+4}-\frac{3}{s+2}$ 得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3s}{(s+4)(s+2)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6}{s+4}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2}\right]=6e^{-4t}-3e^{-2t}$$

（7）$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}+1\right]=\sin t+\delta(t)$

（8）由 $\dfrac{1}{s^2-3s+2}=\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s-1}$ 得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-3s+2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)-\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)=e^{2t}-e^{t}$$

（9）由 $\dfrac{1}{s(RCs+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}$ 得 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(RCs+1)}\right]=1-e^{-\frac{t}{RC}}$

（10）由 $\dfrac{1-RCs}{s(RCs+1)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s+\dfrac{1}{RC}}$ 得 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1-RCs}{s(RCs+1)}\right]=1-2e^{-\frac{t}{RC}}$

（11）由 $\dfrac{w}{s^2+w^2}\cdot\dfrac{1}{(RCs+1)}=\dfrac{RCw}{1+(RCw)^2}\left(\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{RC}}-\dfrac{s}{s^2+w^2}+\dfrac{\dfrac{1}{RCw}\cdot w}{s+\dfrac{1}{RC}}\right)$ 得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{w}{s^2+w^2}\cdot\frac{1}{(RCs+1)}\right]=\frac{RCw}{1+(RCw)^2}\left[e^{-\frac{t}{RC}}-\cos wt+\frac{1}{RCw}\sin wt\right]$$

（12）由 $\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}=\dfrac{7}{s+3}-\dfrac{3}{s+2}$ 得 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}\right]=7e^{-3t}-3e^{-2t}$

（13）由 $\dfrac{100(s+50)}{s^2+201s+200}=\dfrac{100(s+50)}{(s+1)(s+200)}$ 得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{100(s+50)}{s^2+201s+200}\right]=\frac{100}{199}\left(49e^{-t}+150e^{-200t}\right)$$

（14）令 $\dfrac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}=\dfrac{k_1}{s+2}+\dfrac{k_2}{(s+1)^3}+\dfrac{k_3}{(s+1)^2}+\dfrac{k_4}{s+1}$

则 $k_1=\left.\dfrac{s+3}{(s+1)^3}\right|_{s=-2}=-1$，$k_2=\left.\dfrac{s+3}{s+1}\right|_{s=-1}=2$，

$$k_3=\left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s+3}{s+1}\right)\right|_{s=-1}=-1,\qquad k_4=\left.\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s+3}{s+1}\right)\right|_{s=-1}=1$$

从而 $\dfrac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}=\dfrac{-1}{s+2}+\dfrac{2}{(s+1)^3}-\dfrac{1}{(s+1)^2}+\dfrac{1}{s+1}$

所以 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}\right]=-e^{-t}+(t^2-t+1)e^{-t}$

（15）由 $\dfrac{A}{s^2+K^2}=\dfrac{A}{K}\cdot\dfrac{K}{s^2+K^2}$ 得 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{A}{s^2+K^2}\right]=\dfrac{A}{K}\sin Kt$

（16）由于$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+3)^2}\right]=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}t\sin Kt$ 由拉氏变换的积分性质可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+3)^2}\right]=\int_0^t\frac{1}{2\sqrt{3}}\tau\sin\left(\sqrt{3}\tau\right)d\tau=\frac{\sqrt{3}}{18}\sin\left(\sqrt{3}t\right)-\frac{t}{6}\cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

4-19 解题过程：

由于 $f(t)$ 可以写作 $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f_1(t-kT)$

$$=F_1(s)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

则 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)=\mathscr{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty}f_1(t-kT)\right]$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}[f_1(t-kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}F_1(s)e^{-skT}$$

$$=F_1(s)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

4-20 解题过程：

（1）周期矩形脉冲信号的第一个周期时间信号为 $f_1(t)=u(t)-u\left(t-\dfrac{T}{2}\right)$

所以 $F_1(s)=\dfrac{1}{s}\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)$ 则 $F(s)=\dfrac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}=\dfrac{1-e^{-s\frac{T}{2}}}{s(1-e^{-sT})}=\dfrac{1}{s\left(1+e^{-s\frac{T}{2}}\right)}$

（2）正弦全波整流脉冲信号第一周期时间信号为

$$f_1(t)=\sin(wt)\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]=\sin wtu(t)+\sin\left[w\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

所以 $F_1(s)=\frac{w}{s^2+w^2}+\frac{w}{s^2+w^2}e^{-\frac{T}{2}s}$ 则 $F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}=\frac{w}{s^2+w^2}\cdot\frac{1+e^{-\frac{T}{2}s}}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}$

4-27 解题过程：由 $e(t)=e^{-t}$ 得 $E(s)=\mathscr{L}\left[e(t)\right]=\frac{1}{s+1}$

$$r_{zs}(t)=r(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+2e^{-3t}$$

$$R_{zs}(s)=\mathscr{L}\left[r_{zs}(t)\right]=\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s-3}$$

故 $H(s)=\frac{R_{zs}(s)}{E(s)}$

$$=\left[\frac{1}{2(s+1)}-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s-3}\right]\cdot(s+1)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{s+1}{s+2}+\frac{2(s+1)}{s-3}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{s+2}-\frac{8}{s-3}$$

所以 $h(s)=\mathscr{L}^{-1}\left[H(s)\right]=\frac{3}{2}\delta(t)+\left(e^{-2t}+8e^{3t}\right)u(t)$

4-35 解题过程：

$$H(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{k}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{l}(s-p_j)}$$ （K 为系数）

$$=K\frac{s(s+2-j)(s+2+j)}{(s+3)(s+1-3j)(s+1+3j)}$$

$$=K\frac{s\left(s^2+4s+5\right)}{(s+3)\left(s^2+2s+10\right)}$$

又知 $H(\infty)=5$，即 $\lim_{s\to\infty}H(s)=K=5$

$$H(s)=\frac{5s\left(s^2+4s+5\right)}{(s+3)\left(s^2+2s+10\right)}=\frac{5\left(s^3+4s^2+5s\right)}{s^3+5s^2+16s+30}$$

4-38 解题过程：

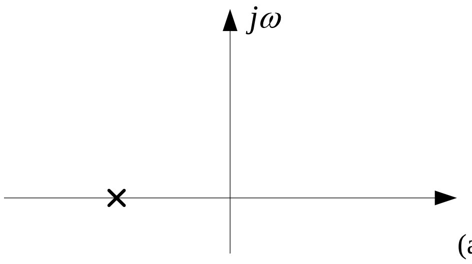
分别画出题图对应的零极点图如下图(a-2)~(f-2)所示。

（1）由解图(a-1)有，

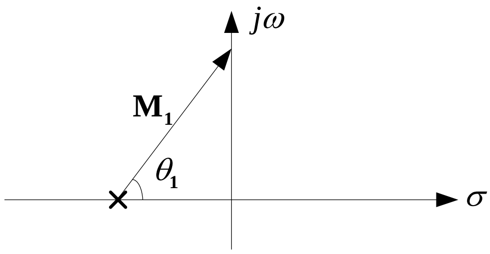
当$\omega=0$时，极点矢量$\mathbf{M_1}$最短，辐角$\theta_1=0$，随着$\omega\uparrow$，有$\mathbf{M_1}\uparrow$，$\theta_1\uparrow$

当$\omega\to\infty$时，$\mathbf{M_1}\to\infty$，$\theta_1\to\dfrac{\pi}{2}$

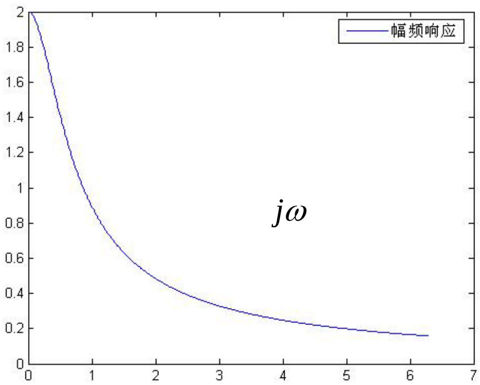
幅频、相频特性如图(a-3)、(a-4)(极点选取-0.5 为例)



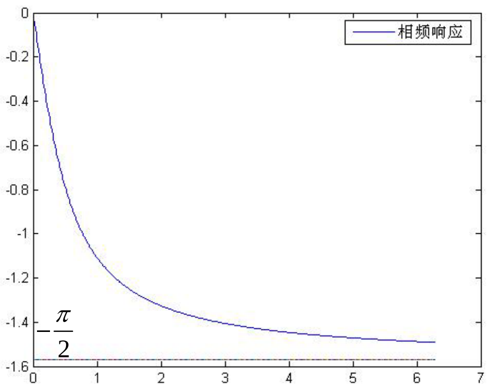
(a-1)



(a-2)



(a-3)



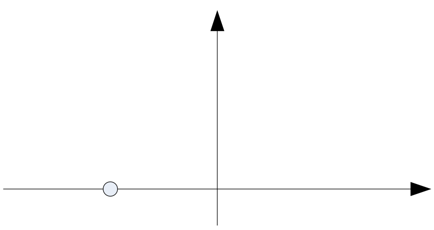
(a-4)

（2）由解图(b)有，

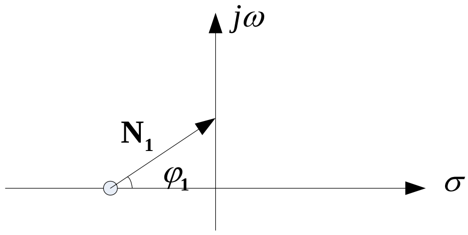
当$\omega=0$时，$\mathbf{N_1}$最短，辐角$\varphi_1=0$，随着$\omega\uparrow$，有$\mathbf{N_1}\uparrow$，$\varphi_1\uparrow$

当$\omega\to\infty$时，$\mathbf{N_1}\to\infty$，$\varphi_1\to\dfrac{\pi}{2}$

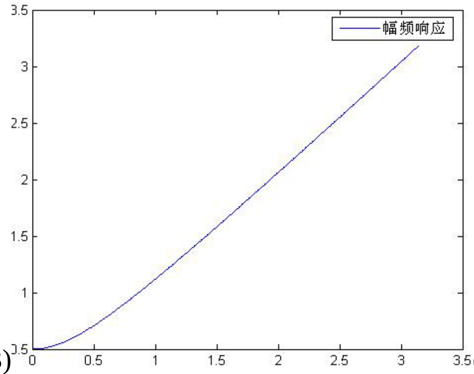
幅频、相频特性如图(以零点为-0.5 为例)



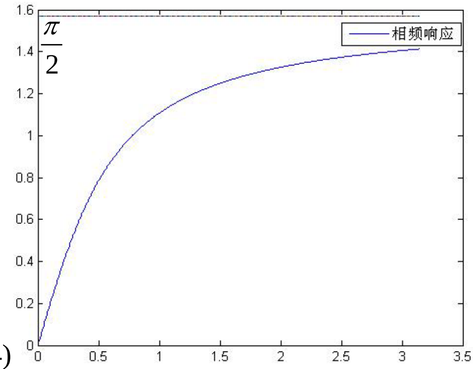
(b-1)



(b-2)



(b-3)



(b-4)

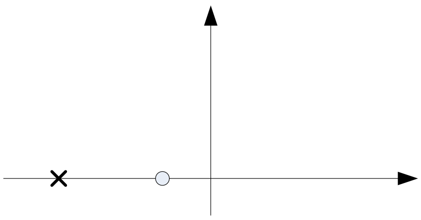
（3）由解图(b)有，

$\omega=0$ 时，$\mathbf{M_1}$，$\mathbf{N_1}$ 均为最短，辐角 $\theta_1=\varphi_1=0$

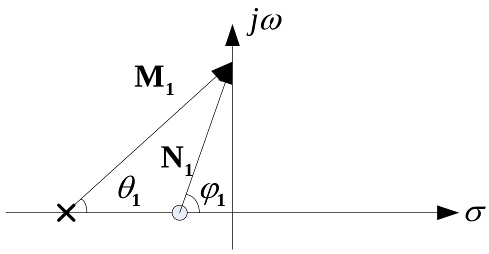
$\omega\uparrow$，则有 $\mathbf{M_1}\uparrow$，$\mathbf{N_1}\uparrow$，且有 $\theta_1\uparrow$，$\varphi_1\uparrow$，且有 $\theta_1<\varphi_1$

$\omega\to\infty$ 时，$\mathbf{M_1}\to\infty$，$\mathbf{N_1}\to\infty$，$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$，$\varphi_1\to\frac{\pi}{2}$

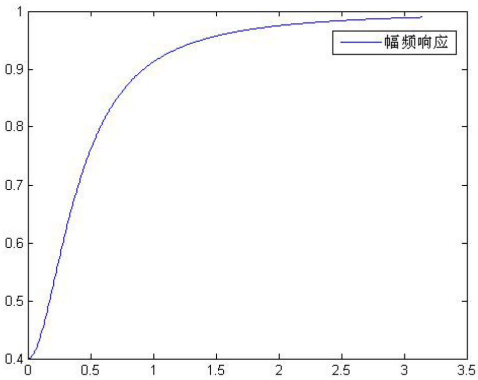
幅频、相频特性如图(以极点-0.5，零点-0.2 为例)



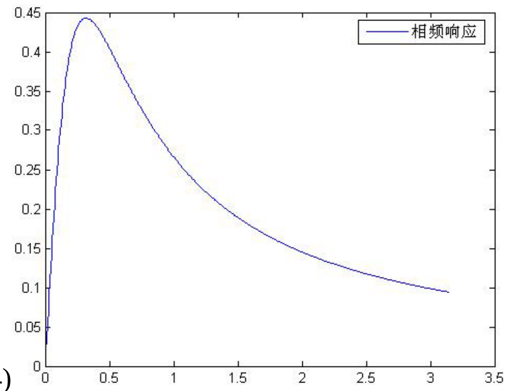
(c-1)



(c-2)



(c-3)



(c-4)

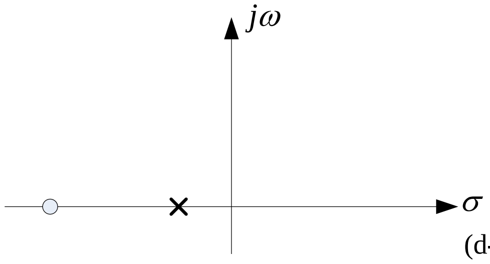
（4）由解图(d)有，

$\omega=0$ 时，$\mathbf{M_1}$，$\mathbf{N_1}$ 均为最短，辐角 $\theta_1=\varphi_1=0$

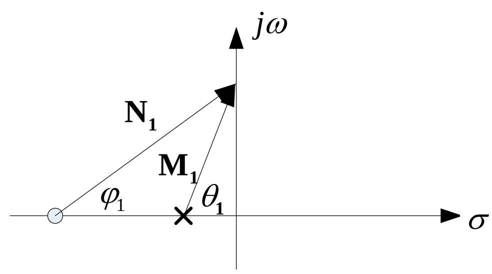
$\omega\uparrow$，则有 $\mathbf{M_1}\uparrow$，$\mathbf{N_1}\uparrow$，且有 $\mathbf{M_1}>\mathbf{N_1}$；$\theta_1\uparrow$，$\varphi_1\uparrow$，且有 $\theta_1>\varphi_1$

$\omega\to\infty$ 时，$\mathbf{M_1}\to\infty$，$\mathbf{N_1}\to\infty$，$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$，$\varphi_1\to\frac{\pi}{2}$

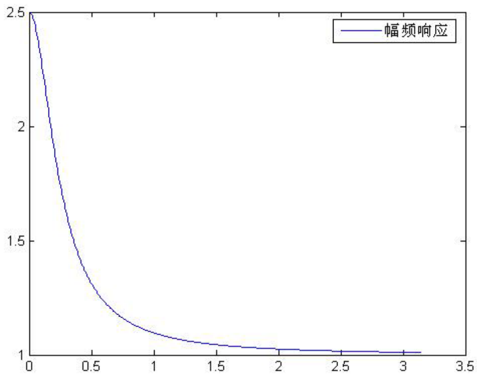
幅频、相频特性如图(以零点-0.5，极点-0.2 为例)



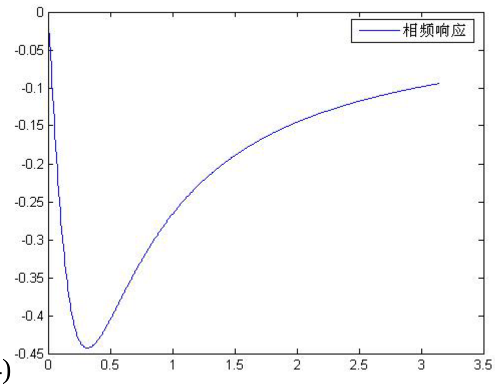
(d-1)



(d-2)



(d-3)



(d-4)

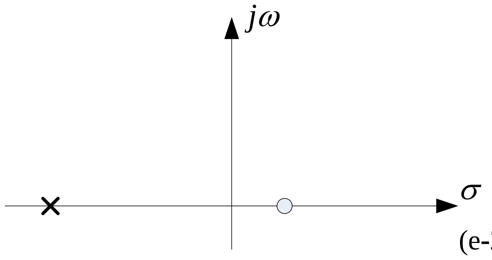
（5）由解图(e)有，

$\omega=0$ 时，$\mathbf{M_1}$，$\mathbf{N_1}$ 均为最短，辐角 $\theta_1=0$，$\varphi_1=\pi$

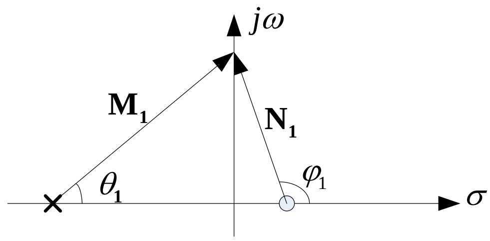
$\omega\uparrow$，则有 $\mathbf{M_1}\uparrow$，$\mathbf{N_1}\uparrow$，$\mathbf{M_1}>\mathbf{N_1}$；$\theta_1\uparrow$，$\varphi_1\downarrow$

$\omega\to\infty$ 时，$\mathbf{M_1}\to\infty$，$\mathbf{N_1}\to\infty$，$\theta_1\to\dfrac{\pi}{2}$，$\varphi_1\to\dfrac{\pi}{2}$

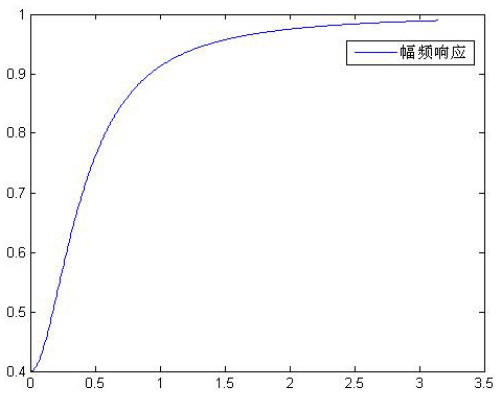
幅频、相频特性如图(以极点-0.5，零点 0.2 为例)



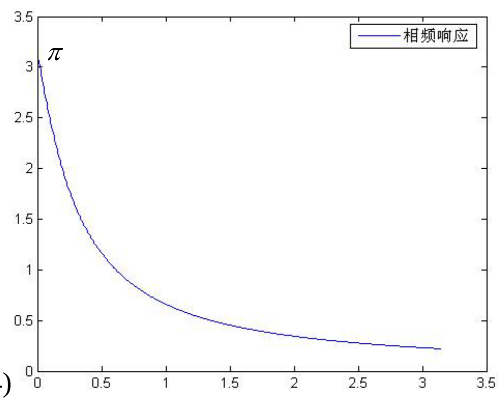
(e-1)



(e-2)



(e-3)



(e-4)

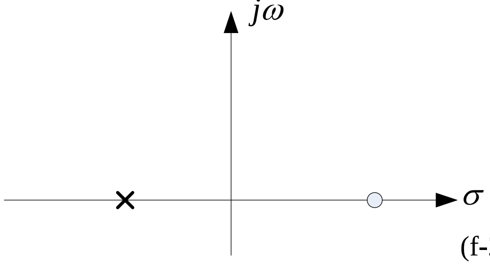
（6）由解图(e)有，

$\omega=0$ 时，$\mathbf{M_1}$，$\mathbf{N_1}$ 均为最短，辐角 $\theta_1=0$，$\varphi_1=\pi$

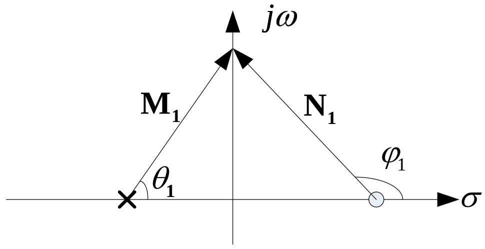
$\omega\uparrow$，则有$\mathbf{M_1}\uparrow$，$\mathbf{N_1}\uparrow$，$\mathbf{M_1}>\mathbf{N_1}$；$\theta_1\uparrow$，$\varphi_1\downarrow$，但相对关系与(e)中不同。

$\omega\to\infty$时，$\mathbf{M_1}\to\infty$，$\mathbf{N_1}\to\infty$，$\theta_1\to\dfrac{\pi}{2}$，$\varphi_1\to\dfrac{\pi}{2}$

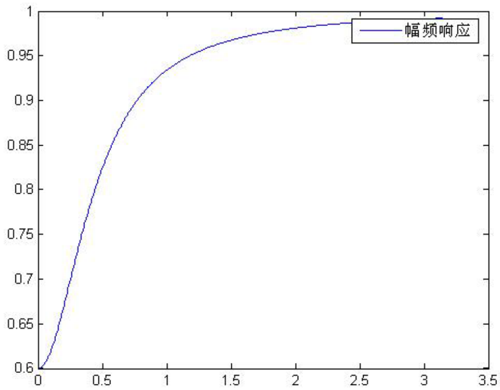
幅频、相频特性如图(以极点-0.5，零点 0.3 为例)



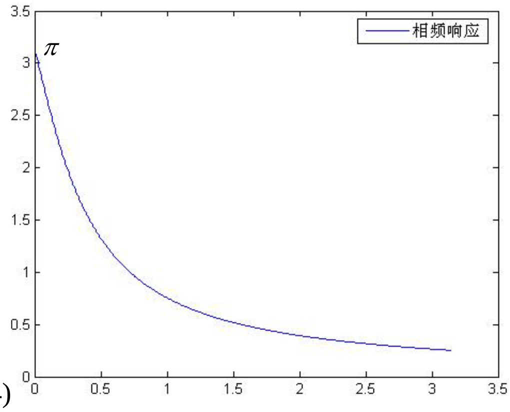
(f-1)



(f-2)



(f-3)



(f-4)

5-6 解题过程：

令 $e_1(t)=\frac{\pi}{\omega_c}\delta(t)$，$e_2(t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$

$$E_1(j\omega)=\mathscr{F}\left[e_1(t)\right]=\frac{\pi}{\omega_c}$$

$$E_2(j\omega)=\mathscr{F}\left[e_2(t)\right]=\frac{\pi}{\omega_c}\left[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)\right]=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c},|\omega|<\omega_c\\ 0,\quad \text{其他}\end{cases}$$

理想低通的系统函数的表达式 $H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

其中 $|H(j\omega)|=\begin{cases}1,|\omega|<\omega_c\\ 0,|\omega|\geq\omega_c\end{cases}\qquad \varphi(\omega)=-\mathrm{t}_0\omega$

因此有

$$R_1(j\omega)=H(j\omega)E_1(j\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}e^{-\mathrm{t}_0\omega},|\omega|<\omega_c\\ 0,\qquad \text{其他}\end{cases}$$

$$R_2(j\omega)=H(j\omega)E_2(j\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}e^{-\mathrm{t}_0\omega},|\omega|<\omega_c\\ 0,\qquad \text{其他}\end{cases}$$

$$R_1(j\omega)=R_2(j\omega)$$

则$\mathscr{F}^{-1}\left[R_1(j\omega)\right]=\mathscr{F}^{-1}\left[R_2(j\omega)\right]$

5-8 解题过程：

记 $f(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}=\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}\cdot\frac{\omega_c}{\pi}$

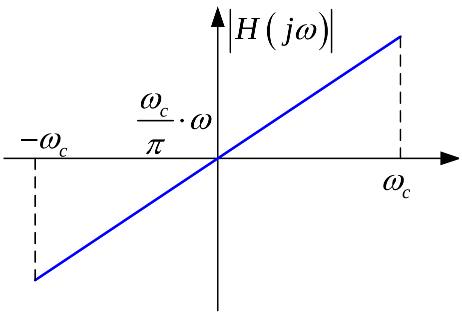
$$F(j\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c},|\omega|<\omega_c\\ 0,\quad |\omega|\geq\omega_c\end{cases}$$

$$H(j\omega)=\mathscr{F}\left[h(t)\right]=\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}\right]\right\}$$

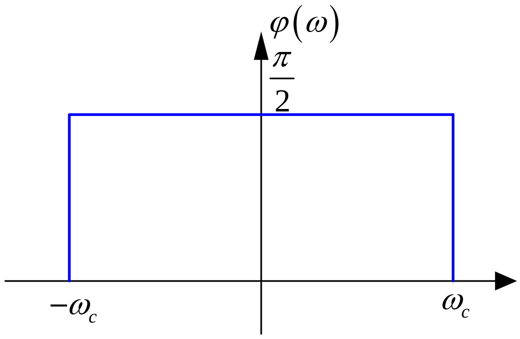
$$=j\omega F(j\omega)=\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}\cdot j\omega,|\omega|<\omega_c\\ 0,\quad |\omega|\geq\omega_c\end{cases}$$

故 $H(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}\cdot\omega, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases}$ $\qquad\varphi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|\ge\omega_c\end{cases}$

$|H(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 的图形如解图。



幅频响应



相频响应

5-11 解题过程：

由题图 5-11 有 $v_2(t)=\left[v_1(t-T)-v_1(t)\right]*h(t)$

据时域卷积定理有 $V_2(j\omega)=\left[V_1(j\omega)e^{-j\omega T}-V_1(j\omega)\right]H(j\omega)$

（1） $v_1(t)=u(t)$

$$v_2(t)=\left[u(t-T)-u(t)\right]*h(t)$$

由 $h(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[H(j\omega)\right]=\dfrac{1}{\pi}Sa(t-t_0)$， $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda$，有

$$\begin{aligned}v_2(t)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-T}Sa(\lambda-t_0)\,d\lambda-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t}Sa(\lambda-t_0)\,d\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-t_0-T}Sa(\lambda')\,d\lambda'-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-t_0}Sa(\lambda'')\,d\lambda''\end{aligned}$$

又知 $S_i(y)=\int_{-\infty}^{y}Sa(x)\,dx$，所有

$$v_2(t)=\frac{1}{\pi}\left[S_i(t-t_0-T)-S_i(t-t_0)\right]$$

（2） $v_1(t)=\dfrac{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}{t}=Sa\left(\dfrac{t}{2}\right)$

$$V_1(j\omega)=F\left[v_1(t)\right]=\begin{cases}2\pi & |\omega|<\dfrac{1}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $V_2(j\omega)=V_1(j\omega)H(j\omega)\left(e^{-j\omega T}-1\right)=\begin{cases}2\pi e^{-j\omega t_0}\left(e^{-j\omega T}-1\right) & |\omega|<\dfrac{1}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

所以 $v_2(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[V_2(j\omega)\right]=Sa\left[\dfrac{1}{2}(t-t_0-T)\right]-Sa\left[\dfrac{1}{2}(t-t_0)\right]$

5-18 解题过程：

信号 $g(t)$ 经过滤波器 $H(j\omega)$ 的频谱为

$$G_1(\omega)=G(\omega)H(j\omega)=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)G(\omega)$$

信号 $g(t)$ 经过与 $\cos(\omega_0 t)$ 进行时域相乘后频谱为

$$G_2(\omega)=\frac{1}{2}\left[G(\omega+\omega_0)+G(\omega-\omega_0)\right]$$

信号 $g_1(t)$ 经过与 $-\sin(\omega_0 t)$ 进行时域相乘后频谱为

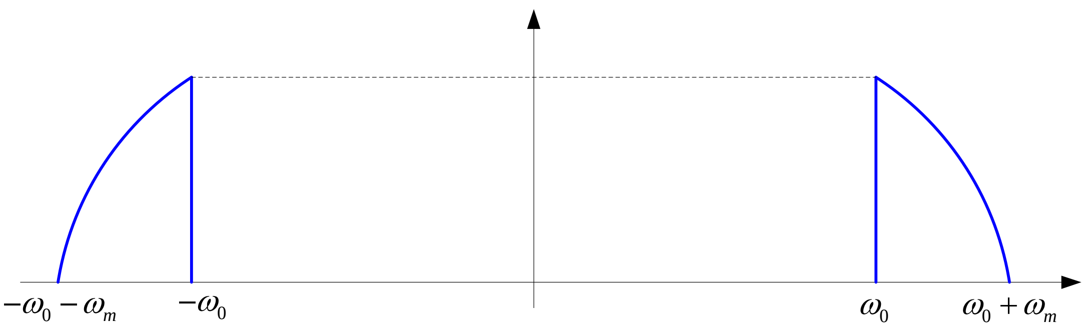
$$\begin{aligned}G_3(\omega)&=-\frac{j}{2}\left[G_1(\omega+\omega_0)-G_1(\omega-\omega_0)\right]\\&=-\frac{1}{2}\left[G(\omega+\omega_0)\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)-G(\omega-\omega_0)\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[G(\omega-\omega_0)\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)+G(\omega+\omega_0)\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(\omega)&=G_2(\omega)+G_3(\omega)\\&=\frac{1}{2}\left[G(\omega+\omega_0)+G(\omega-\omega_0)\right]+\frac{1}{2}\left[G(\omega-\omega_0)\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)+G(\omega+\omega_0)\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)\right]\\&=\frac{1}{2}\left\{G(\omega+\omega_0)\left[1-\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)\right]+G(\omega-\omega_0)\left[1+\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)\right]\right\}\end{aligned}$$

又由于 $1+\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0)=\begin{cases}2 & (\omega>\omega_0)\\ 0 & (\omega<\omega_0)\end{cases}$

则 $V(\omega)=G(\omega-\omega_0)U(\omega-\omega_0)+G(\omega+\omega_0)U(\omega+\omega_0)$

其图形如图所示



5-20 解题过程：

（1）系统输入信号为$\delta(t)$时，$\delta(t)\cos(\omega_0 t)=\delta(t)$

所以虚框所示系统的冲激响应$h(t)$就是$h_i(t)$

即 $$h(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[H_i(j\omega)\right]=\frac{\sin\left[2\Omega(t-t_0)\right]}{\pi(t-t_0)}$$

（2）输入信号与$\cos(w_0 t)$在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\cos^2(\omega_0 t)=\left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\right]^2\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}$$

又由$H_i(j\omega)$的表达式可知$\omega_0\gg\Omega$时，载波为$2\omega_0$的频率成分被滤除

而且 $\varphi(\omega)=-\omega t_0$

故 $$r(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\Omega(t-t_0)}{\Omega(t-t_0)}\right]^2$$

（3）输入信号$e(t)$与$\cos\omega_0 t$在时域相乘之后

$$e(t)\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega(t)}{\Omega t}\right]^2\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t=\left[\frac{\sin\Omega(t)}{\Omega t}\right]^2\cdot\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)$$

$\omega_0\gg\Omega$时，载波为$2\omega_0$的频率成分被滤除

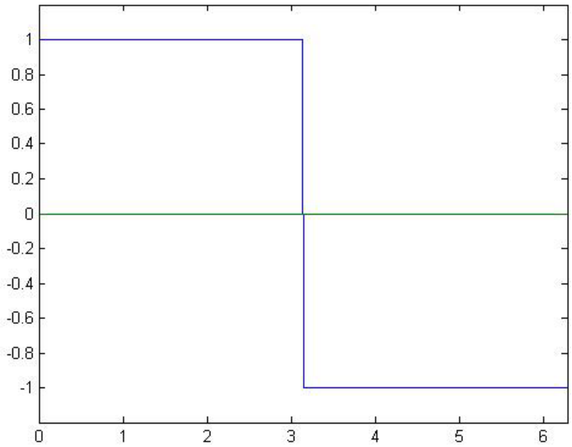
故 $r(t)=0$

（4）由于理想低通滤波器能够无失真的传输信号，只是时间上的搬移，故理想低通滤波器是线性时变系统；又 $h(t)=h_i(t)$ 所以该系统是线性时变的。

6-1 解题过程：

图 6-5 所示的矩形波如解图所示，它表示为

$$f(t)=\begin{cases}+1 & (0<t<\pi)\\ -1 & (\pi<t<2\pi)\end{cases}$$



在 $[0,2\pi]$ 内

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt\\ &=\int_0^{\pi}\cos(nt)dt+\int_0^{\pi}\left[-\cos(nt)\right]dt\\ &=\frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_{\pi}^{2\pi}\\ &=0 \qquad (n=1,2,3\cdots)\end{aligned}$$

故有 $f(t)$ 与信号 $\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$ 正交（n 为整数）。

6-2 解题过程：

在区间 $(0,2\pi)$ 内，有

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\cos(n_1 t)\cos(n_2 t)dt \qquad (n_1\neq n_2，且n_1 n_2均为不为零的整数)\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\cos(n_1+n_2)t+\cos(n_1-n_2)t\right]dt\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1+n_2}\sin(n_1+n_2)t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1-n_2}\sin(n_1-n_2)t\Big|_0^{2\pi}\\ &=0\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}cos^2(nt)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2nt)}{2}dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt+\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2nt)}{2}dt=\pi$$

满足正交函数集的条件，故 $\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$ 正交（n 为整数）是区间 $(0,2\pi)$

中的正交函数集。

6-3 解题过程：

在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n_1t)\cos(n_2t)dt \qquad (n_1\neq n_2，且n_1n_2均为不为零的整数)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(n_1+n_2)t+\cos(n_1-n_2)t\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1+n_2}\sin(n_1+n_2)t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1-n_2}\sin(n_1-n_2)t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1+n_2}\sin\left[\frac{\pi(n_1+n_2)}{2}\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n_1-n_2}\sin\left[\frac{\pi(n_1-n_2)}{2}\right]$$

只有当(n_1+n_2)和(n_1-n_2)均为偶数时上式为零，因此不满足函数之间的正交性条件，$\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$正交（$n$为整数）不是区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$中的正交函数集。

6-4 解题过程：

在区间$(0,1)$内，有

$$\int_0^1 x_ix_jdx \qquad (i\neq j，i,j\in\{0,1,2,3\})$$

$$=\int_0^1 x^{i+j}dx=\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\Big|_0^1=\frac{1}{i+j+1}\neq 0$$

不满足正交函数集所要求的第一个条件，故$1,x,x^2,x^3$不是区间$(0,1)$上的正交函数集。

6-5 解题过程：

由题 6-2 结论有$\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$正交（$n$为整数）是区间$(0,2\pi)$内的正交函数集。以下考察其完备性。

取$x(t)=\sin t$，在区间$(0,2\pi)$内有

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt$$
$$=\pi<\infty$$

且有

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cos(nt)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\left[(n+1)t\right]+\sin\left[(1-n)t\right]}{2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(1-n)t}{1-n}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=0$$

不符合完备正交函数集的定义，故$\cos t,\cos(2t),\cdots,\cos(nt)$正交（$n$为整数）不是区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的完备正交函数集。

6-9 解题过程：

令$e^t\approx at^2+bt+c$，则均方误差

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^t-at^2+bt+c\right]^2dt$$

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^t-at^2+bt+c\right]^2dt\right\}=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(2at^4-2t^2e^t+2bt^3+2ct^2\right)dt=0$$

$$\frac{4}{5}a+\frac{4}{3}c=2e-10e^{-1} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^t-at^2+bt+c\right]^2dt\right\}=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(2bt^2-2te^t+2at^3+2ct^2\right)dt=0$$

$$\frac{4}{3}b+2c=4e^{-1} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial c}=\frac{\partial}{\partial c}\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^t-at^2+bt+c\right]^2dt\right\}=0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(2c-2e^t+2at^2+2bt\right)dt=0$$

$$4c+\frac{4}{3}a=2e-2e^{-1} \tag{3}$$

（1）（2）（3）式联立有

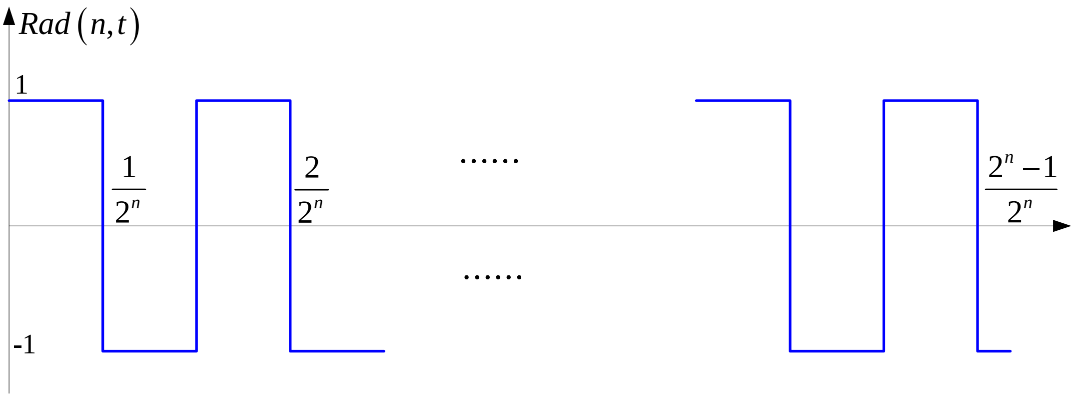
$$\begin{cases} \frac{4}{5}a+\frac{4}{3}c=2e-10e^{-1} \\ \frac{4}{3}b+2c=4e^{-1} \\ 4c+\frac{4}{3}a=2e-2e^{-1} \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a=\frac{15}{4}\left(e-e^{-1}\right) \\ b=3e^{-1} \\ c=\frac{1}{4}\left(-3e+33e^{-1}\right) \end{cases}$$

6-10 解题过程：

取 $x(t)=\cos(2\pi t)$，则 $x(t)$ 满足

$$0<\int_0^1 x^2(t)\,dt<\infty$$

在拉德马赫（Rademacher）函数集中任取一函数 Rad(n,t)，波形如解图



$$\int_0^1 x(t)Rad(n,t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2^n}}\cos(2\pi t)\,dt-\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{2}{2^n}}\cos(2\pi t)\,dt+\cdots-\int_{\frac{2^n-1}{2^n}}^{1}\cos(2\pi t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}-\sin\frac{2\pi}{2^{n-1}}+\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}+\sin\frac{3\pi}{2^{n-1}}-\sin\frac{2\pi}{2^{n-1}}-\cdots+\sin\frac{2^n-1}{2^n}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}\pi=\frac{1}{\pi}\sin\pi=0$$

故存在 $x(t)$ 使 $\int_0^1 x(t)Rad(n,t)\,dt$（n 为任意正整数）为 0，拉德马赫函数集不是 $(0,1)$ 上的完备正交函数集。

6-11 解题过程：

当 $f_1(\mathrm{t})=\cos(\omega t)$，$f_2(\mathrm{t})=\sin(\omega t)$ 同时作用于单位电阻时产生的能量

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\right]^2 dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos^2(\omega t)+2\sin(\omega t)\cos(\omega t)+\sin^2(\omega t)\right]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1+\sin(2\omega t)\right]dt$$

取一个周期$(0, T)$其中$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，则$\sin(2\omega t)$在$(0, T)$内积分为零，有

$$E=\int_0^T\left[1+\sin(2\omega t)\right]dt=T$$

当$f_1(\mathrm{t})$，$f_2(\mathrm{t})$分别作用于单位电阻时各自产生的能量为（仍取$(0, T)$内）

$$E_1=\int_0^T\cos(\omega t)^2\,dt=\int_0^T\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

$$E_2=\int_0^T\sin(\omega t)^2\,dt=\int_0^T\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

故 $$E_1+E_2=T$$

即两信号同时作用于单位电阻所产生的能量等于$f_1(\mathrm{t})$和$f_2(\mathrm{t})$分别作用时产生的能量之和。当$f_1(\mathrm{t})=\cos(\omega t)$，$f_2(\mathrm{t})=\cos(\omega t+45^\circ)$时，同时作用时有

$$\begin{aligned}E&=\int_0^T\left[\cos(\omega t)+\cos\left(\omega t+45^\circ\right)\right]^2dt\\&=\int_0^T\left[2\cos\left(\frac{\omega t+\omega t+45^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t-\omega t-45^\circ}{2}\right)\right]dt\\&=4\cos^2\frac{\pi}{8}\int_0^T\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{8}\right)^2dt\\&=2T\cos^2\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

分开作用时

$$E_1=\int_0^T\cos(\omega t)^2\,dt=\int_0^T\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt=\frac{T}{2}$$

$$\begin{aligned}E_2&=\int_0^T\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)^2dt=\int_0^T\frac{1+\cos\left(2\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}{2}dt\\&=\int_0^T\frac{1-\sin(2\omega t)}{2}dt=\frac{T}{2}\end{aligned}$$

$$E_1+E_2\neq E$$

即当$f_1(\mathrm{t})=\cos(\omega t)$，$f_2(\mathrm{t})=\cos(\omega t+45^\circ)$时上述结论不成立，其原因是$\cos(\omega t)$和$\cos(\omega t+45^\circ)$相互间不满足正交关系，而$\cos(\omega t)$和$\sin(\omega t)$满足正交关系。

6-16 解题过程：

（1）$E=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t}u(t)dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-2t}dt=\dfrac{1}{2a}<\infty$

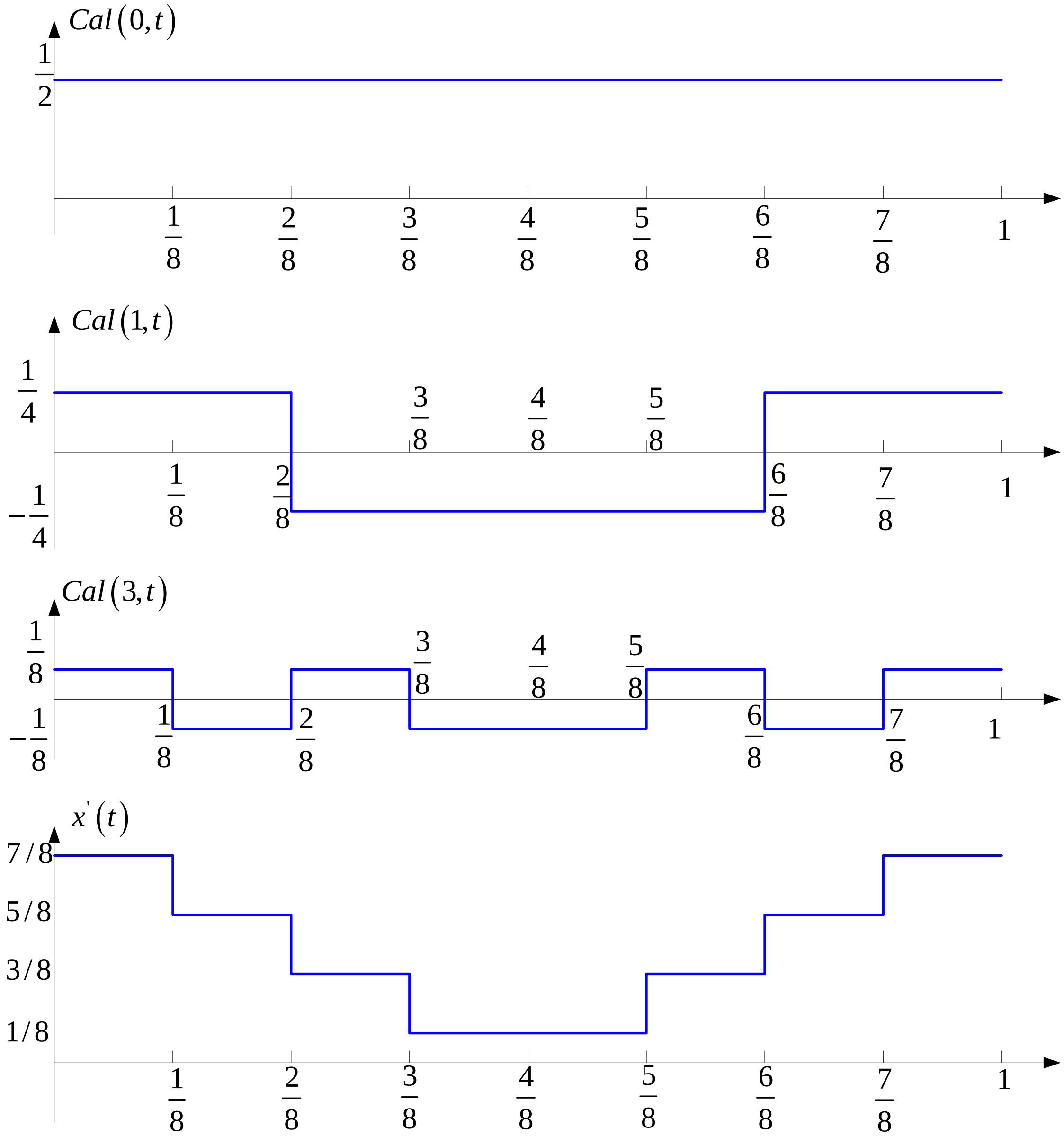
则 $f(t)=e^{-at}u(t)$ 为能量函数。

由 $F(\omega)=\dfrac{1}{a+j\omega}$ 得

$$\mathscr{F}\left[R(\tau)\right]=\frac{1}{a^2+\omega^2}$$

所以
$$R(\tau)=\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{a^2+\omega^2}\right]=\frac{1}{2a}e^{-a|\tau|}$$

（2）对周期余弦函数 $f_1(t)=E\cos\omega_0 t$ 有



$$R_1(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt+\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt+\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t+\tau)\,dt\right]$$

$$=\frac{E^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

又 $f(t)=E\cos(\omega_0 t)u(t)=f_1(t)u(t)$

则有

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,f(t-\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,f(t+\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t-\tau)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t)\,f_1(t+\tau)\,dt$$

所以 $R(\tau)=\frac{1}{2}R_1(\tau)=\frac{E^2}{4}\cos\omega_0\tau$

6-17 解题过程：

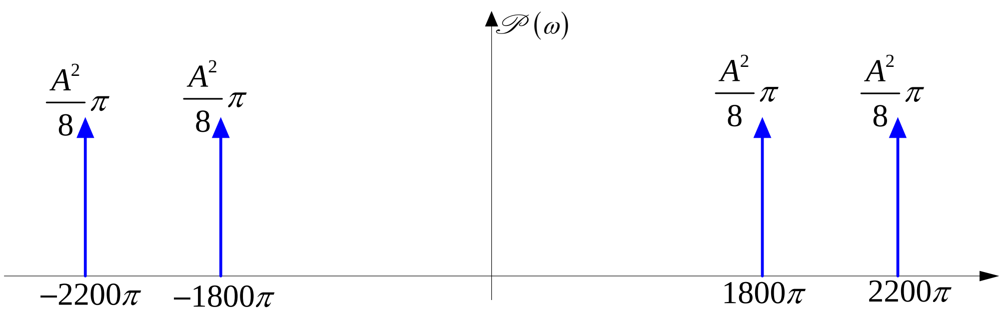
（4） $f(t)=\frac{A}{2}\left[\sin(2200\pi t)-\sin(1800\pi t)\right]$

所以 $P=\frac{A^2}{8}+\frac{A^2}{8}=\frac{A^2}{4}$

功率谱

$$\mathscr{P}(\omega)=\frac{A^2}{8}\pi\left[\delta(\omega+2200\pi)+\delta(\omega-2200\pi)+\delta(\omega+1800\pi)+\delta(\omega-1800\pi)\right]$$

功率谱如图所示



（6） $f(t)=A\cdot\dfrac{1-\cos(400\pi t)}{2}\cos(2000\pi t)$

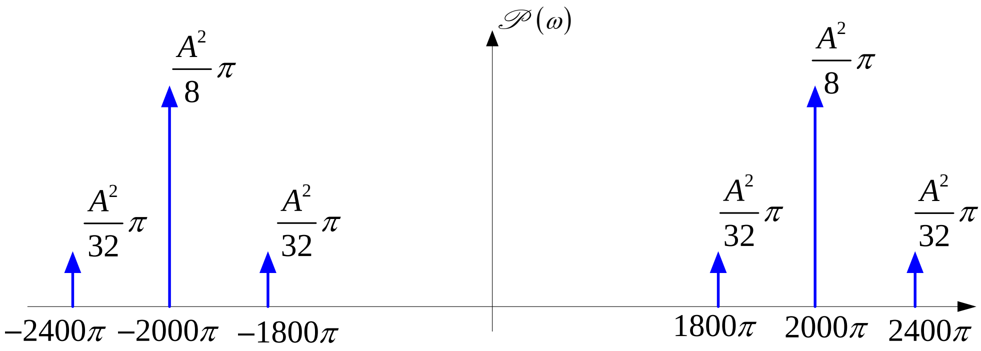
$$=\frac{A}{2}\cos(2000\pi t)-\frac{A}{4}\left[\cos(2400\pi t)+\cos(1600\pi t)\right]$$

所以 $P=\dfrac{A^2}{8}+\dfrac{A^2}{16}=\dfrac{3A^2}{16}$

功率谱

$$\mathscr{P}(\omega)=\frac{A^2}{8}\pi\left[\delta(\omega+2000\pi)+\delta(\omega-2000\pi)\right]+$$
$$\frac{A^2}{32}\pi\left[\delta(\omega+2400\pi)+\delta(\omega-2400\pi)+\delta(\omega+1600\pi)+\delta(\omega-1600\pi)\right]$$

功率谱如图所示



6-21 解题过程：

（1） $r(t)=f(t)*h(t)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(T+\tau-t)d\tau$$

（2） $t=T$ 时， $r(t)=r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$

（3）由题图 6-21 可知

$$r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$$

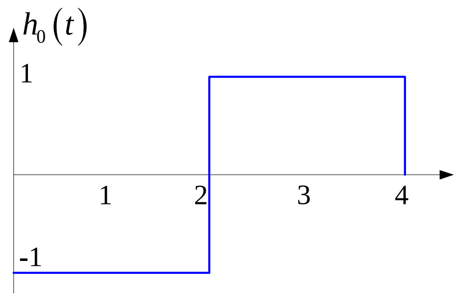
又冲激响应 $h(t)=s(T-t)$ 是信号 $s(t)$ 的匹配滤波器冲激响应，则 $s(t)=0$， $t>T$

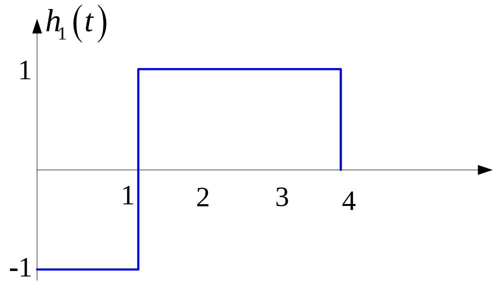
所以第（2）题中

$$r(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)s(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{T}f(\tau)s(\tau)d\tau$$

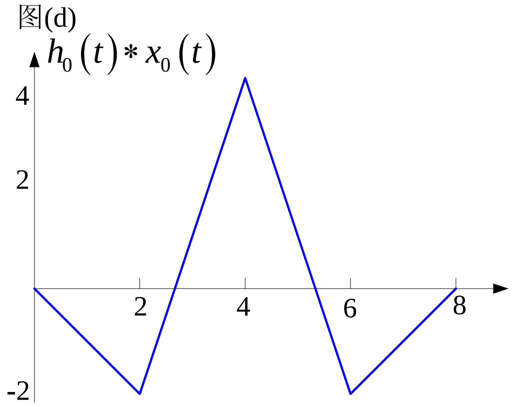
6-22 解题过程：

（1） $h_0(t)=x_0(T-t)$　　$h_1(t)=x_1(T-t)$ 波形解如下图

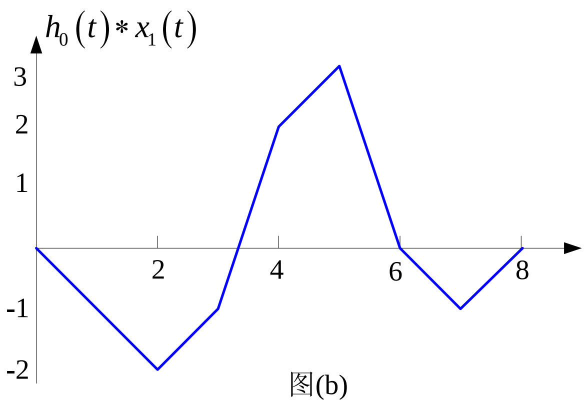




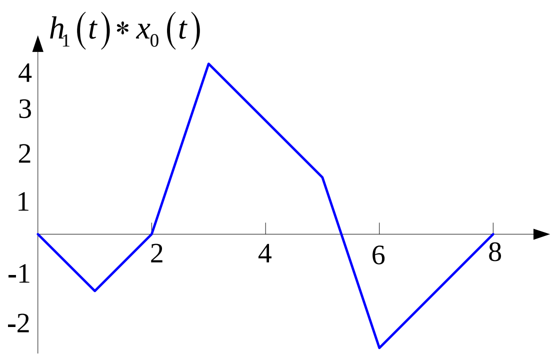
（2） M_0 对 x_0 的响应波形： $h_0(t)*x_0(t)$ 如图(a)； M_0 对 x_1 的响应波形： $h_0(t)*x_1(t)$ 如图(b)； M_1 对 x_0 的响应波形： $h_1(t)*x_0(t)$ 如图(c)； M_1 对 x_1 的响应波形： $h_1(t)*x_1(t)$ 如图(d)



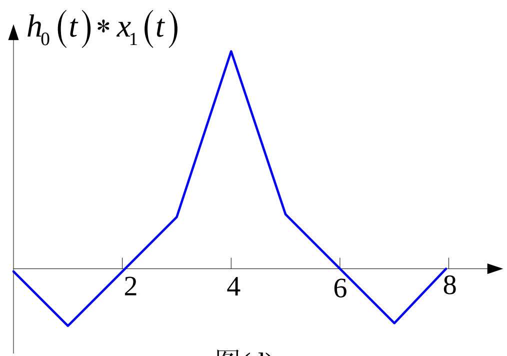
图(a)



图(b)



图(c)



图(d)

（3）由题图可知，M_0 在 $t=4$ 时 $x_0(t)$ 的响应输出为 4，对 $x_1(t)$ 的响应输出为 2；M_1 在 $t=4$ 时对 $x_0(t)$ 的响应输出为 2，对 $x_1(t)$ 的输出响应为 4。若使 $x_0(t)$ 与 $x_1(t)$ 正交，将 $x_0(t)$ 改为如下图(a)，则 M_0 为下图(b)所示。此时 M_0 为 $x_1(t)$ 的响应输出如下图(c)所示， M_1 为 $x_0(t)$ 的输出如下图(d)。在 $t=4$ 时， M_0 对 $x_1(t)$ 和 M_1 对 $x_0(t)$ 的响应为零。

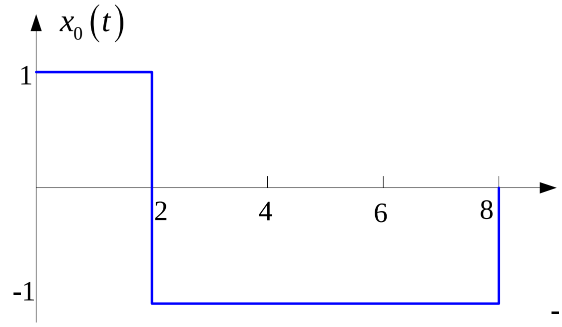


图 (a)

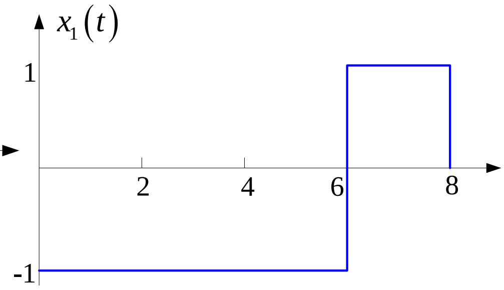


图 (b)

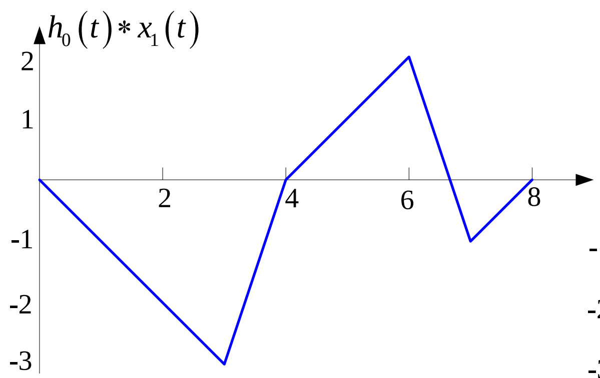


图 (c)

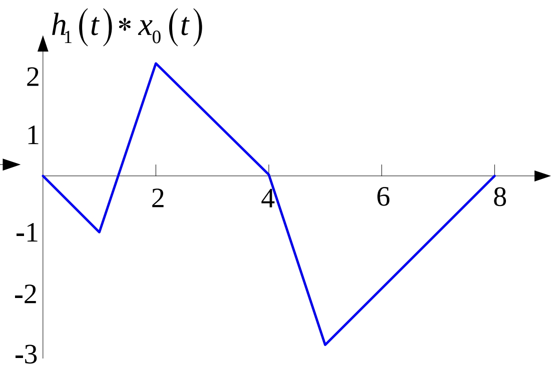
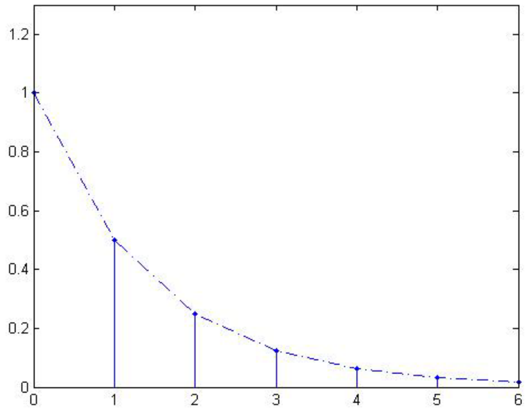
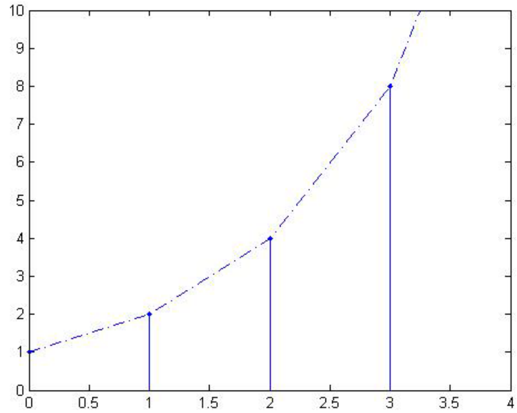


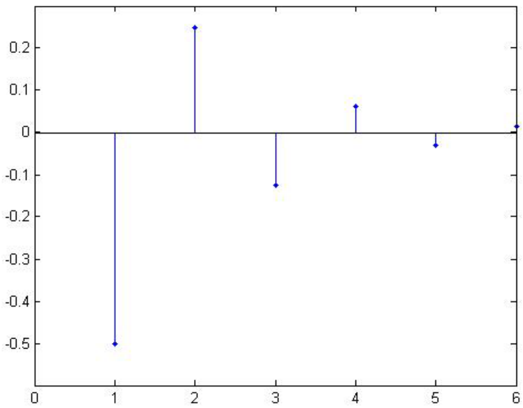
图 (d)

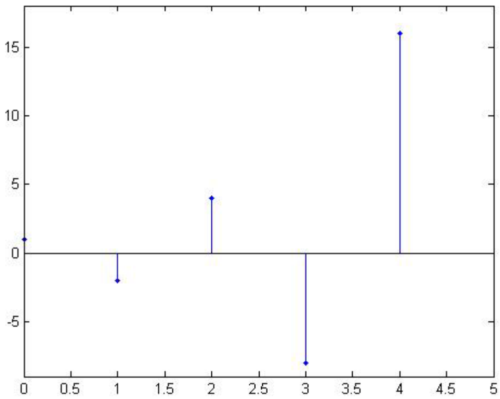
7-1 解题过程：（1） $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$ （2） $x(n)=2^{n}u(n)$



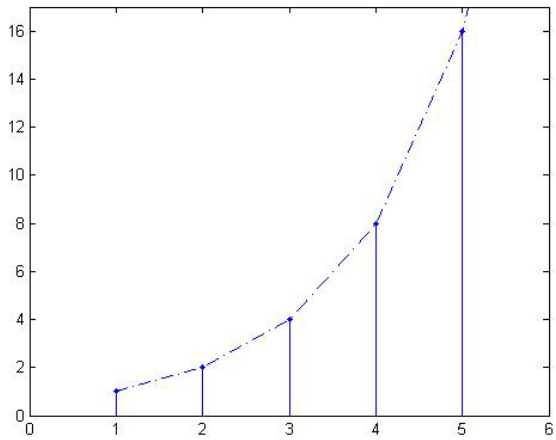


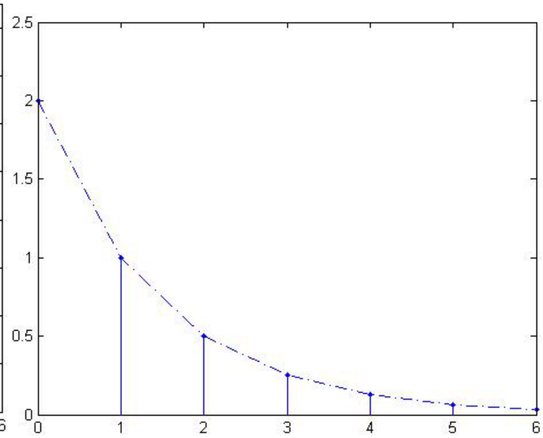
（3） $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$ （4） $x(n)=(-2)^{n}u(n)$





（5） $x(n)=2^{n-1}u(n-1)$ （6） $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n)$





7-5 解题过程：由图可得系统误差方程为

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}y(n-1)$$

（1） $x(n)=\delta(n)$

根据系统差分方程及边界条件 $y(-1)=0$ 进行迭代求解：

$$y(0)=x(0)+\frac{1}{3}y(-1)=1$$
$$y(1)=x(1)+\frac{1}{3}y(0)=\frac{1}{3}$$
$$y(2)=x(2)+\frac{1}{3}y(1)=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

……

$$y(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

（2） $x(n)=u(n)$

$$y(0)=x(0)+\frac{1}{3}y(-1)=1=\frac{3^0}{3^0}$$
$$y(1)=x(1)+\frac{1}{3}y(0)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{3^0+3^1}{3^1}$$
$$y(2)=x(2)+\frac{1}{3}y(1)=1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}=\frac{3^0+3^1+3^2}{3^2}$$

……

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}y(n-1)=\frac{3^0+3^1+3^2+\cdots+3^n}{3^n}$$
$$=\frac{1}{3^n}\cdot\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{3-3^{-n}}{3-1}u(n)$$

（3） $x(n)=u(n)-u(n-5)$

$$y(0)=x(0)+\frac{1}{3}y(-1)=1=\frac{3^0}{3^0}$$
$$y(1)=x(1)+\frac{1}{3}y(0)=\frac{4}{3}=\frac{3^0+3^1}{3^1}$$

……

$$y(4)=x(4)+\frac{1}{3}y(3)=\frac{3^0+3^1+\cdots+3^4}{3^4}=\frac{121}{81}$$
$$y(5)=x(5)+\frac{1}{3}y(4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{121}{81}$$
$$y(6)=x(6)+\frac{1}{3}y(5)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{121}{81}$$

……

$$y(n)=\frac{3-3^n}{2}\left[u(n)-u(n-5)\right]+\frac{121}{81}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}u(n-5)$$
$$=\frac{3-3^n}{2}\left[u(n)-u(n-5)\right]+\frac{121}{3^n}u(n-5)$$

7-9 解题过程：

围绕相加器给出

$$y(n)=b_1y(n-1)+b_2y(n-2)+a_0x(n)+a_1x(n-1)$$

整理的差分方程为

$$y(n)-b_1y(n-1)-b_2y(n-2)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$$

这是二阶差分方程。

7-30 解题过程：

（1）单位冲激信号 $\delta(n)$ 可表示为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

系统对 $u(n)$ 的响应是 $g(n)$，又由系统的线性时不变特性可得

对 $u(n-1)$ 的响应是 $g(n-1)$，故系统得冲激响应

$$h(n)=g(n)-g(n-1)$$

（2）单位阶跃信号 $u(n)$ 可表示为

$$u(n)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\delta(n\text{-}k)$$

有系统的线性时不变特性可得对 $\delta(n\text{-}k)$ 的响应为 $h(n\text{-}k)$。

故阶跃响应 $g(n)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}h(n\text{-}k)$

7-33 解题过程：

（1）$y(n)=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)$

$$= \left\{u(n) * \left[\delta(n) - \delta(n-3)\right]\right\} * \left[(0.8)^n u(n)\right]$$

$$= \left[u(n) - u(n-3)\right] * \left[(0.8)^n u(n)\right]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (0.8)^m u(m) u(n-m) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (0.8)^m u(m) u(n-m-3)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} 0.8^m u(n) - \sum_{m=0}^{n-3} 0.8^m u(m) u(n-3)$$

$$= \frac{1-(0.8)^{n+1}}{1-0.8} u(n) - \frac{1-(0.8)^{n-2}}{1-0.8} u(n-3)$$

$$= 5\left[(1-0.8)^{n-1} u(n) - (1-0.8)^{n-2} u(n-3)\right]$$

（2） $y(n) = x(n) * \left[h_1(n) * h_2(n)\right]$

$$= u(n) * \left\{\left[\delta(n) - \delta(n-3)\right] * (0.8)^n u(n)\right\}$$

$$= u(n) * \left[(0.8)^n u(n) - (0.8)^{n-3} u(n-3)\right]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (0.8)^m u(m) u(n-m) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (0.8)^m u(m) u(n-m-3)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} 0.8^m u(n) - \sum_{m=0}^{n-3} 0.8^m u(m) u(n-3)$$

$$= \frac{1-(0.8)^{n+1}}{1-0.8} u(n) - \frac{1-(0.8)^{n-2}}{1-0.8} u(n-3)$$

$$= 5\left[(1-0.8)^{n-1} u(n) - (1-0.8)^{n-2} u(n-3)\right]$$

8-1 解题过程：

（1）$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\left(|z|>\frac{1}{2}\right)$

（2）$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n z^{-n}=\frac{z}{z+\frac{1}{4}}\left(|z|>\frac{1}{4}\right)$

（3）$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z\right)^{-n}=\frac{z}{z-3}\left(|z|>3\right)$

（4）$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=-\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\left(|z|<\frac{1}{3}\right)$

（5）$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)\right]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-(2z)^n\right]$

$=1-\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n=1-\frac{1}{1-2z}=\frac{-2z}{1-2z}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\left(|z|<\frac{1}{2}\right)$

（6）$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n+1)z^{-n}=z\left(|z|<+\infty\right)$

（7）$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[u(n)-u(n-10)\right]z^{-n}$

$=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$

$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(|z|>0\right)$

由于$\frac{1-\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z^{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{z^9\left(z-\frac{1}{2}\right)}$故极点为$z=0$（9 阶），$z=\frac{1}{2}$（1 阶）

零点由$z^{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=0$可求得。

令 $z = re^{j\omega_0}$ 代入有

$\left(re^{j\omega_0}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} e^{j2k\pi}$ 于是 $re^{j\omega_0} = \frac{1}{2}e^{j\frac{2k\pi}{10}}\left(k = 0,1,2,\cdots 9\right)$

所以零点　　$z = \frac{1}{2}e^{j\frac{2k\pi}{10}}\left(k = 0,1,2,\cdots 9\right)$

又 $z = \frac{1}{2}$ 出零极点抵消，故收敛域为 $|z| > 0$。

（8）$X\left(z\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u\left(n\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u\left(n\right)\right] z^{-n}$

$$= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{z\left(2z - \frac{5}{6}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}\left(|z| > \frac{1}{2}\right)$$

（9）$X\left(z\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(n\right) - \frac{1}{8}\delta\left(n-3\right)\right] z^{-n} = 1 - \frac{1}{8}z^{-3}\left(|z| > 0\right)$

8-5 解题过程：

（1）$X\left(z\right) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{z}{z + 0.5}$　　　　　$x\left(n\right) = \left(-0.5\right)^{n} u\left(n\right)$

（2）$X\left(z\right) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$

$$= \frac{1 - 0.5z^{-1}}{\frac{1}{8}\left(z^{-1} + 2\right)\left(z^{-1} + 4\right)}$$

$$= \frac{8}{z^{-1} + 2} - \frac{12}{z^{-1} + 4}$$

$$= \frac{4}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{3}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$= \frac{4z}{z + \frac{1}{2}} - \frac{3z}{z + \frac{1}{4}}$$

$$x(n)=\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)^n-3\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

（3） $$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

（4）

$$X(z)=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}=\frac{1-a^2}{z^{-1}-a}-a=\frac{a^2-1}{a}\bullet\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}-a$$

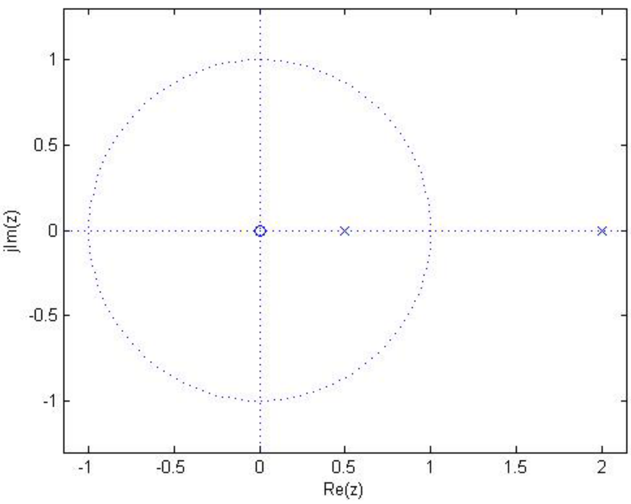
$$x(n)=\frac{a^2-1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n)-a\delta(n)$$

8-12 解题过程：

由于 $$X(z)=\frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{-3z}{2z^2-5z+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

零极点如图所示



解图 8-12

$$\frac{X(z)}{z}=-\frac{3}{2}\frac{z}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{z-\frac{1}{2}}-\frac{1}{z-2}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-2}$$

当$|z|>2$时为右边序列$x(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-2^n\right]u(n)$

当$|z|<0.5$时为左边序列$x(n)=\left[2^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(-n-1)$

当$0.5<|z|<2$时为右边序列$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+2^n u(-n-1)$

8-18 解题过程：

因为$H(z)=\mathscr{Z}\left[h(n)\right]=\frac{z}{z-a}(|z|>a)$

$$X(z)=\mathscr{Z}\left[x(n)\right]=\frac{z}{z-1}-\frac{z^{-N+1}}{z-1}(|z|>1)$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-a}\cdot\frac{z-z^{-N+1}}{z-1}(|z|>1)$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\left[\frac{1}{z-a}\cdot\frac{z}{z-1}\right](1-z^{-N})=\left[\frac{1}{1-a}\cdot\frac{z}{z-1}-\frac{a}{1-a}\cdot\frac{1}{z-a}\right](1-z^{-N})(|z|>1)$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-a}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{az}{z-a}\right](1-z^{-N})$$

由于$y(n)$是因果序列，据移位性质求得

$$y(n)=\mathscr{Z}^{-1}\left[Y(z)\right]=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)-\frac{1-a^{n+1-N}}{1-a}u(n-N)$$

8-25 解题过程：

由图得 $y(n)=b_1y(n-1)+b_2y(n-2)+ax(n-1)$

设系统是因果系统，对差分方程两边取z变换：

$$Y(z)=b_1z^{-1}Y(z)+b_2z^{-2}Y(z)+az^{-1}X(z)$$

系统函数 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{az^{-1}}{1-b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}=\frac{az}{z^2-b_1z-b_2}$

单位样值响应

$$h(n)=\mathscr{Z}^{-1}\left[H(z)\right]=\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{az}{z^2-b_1z-b_2}\right]$$

$$=\mathscr{Z}^{-1}\left[\frac{a}{p_1-p_2}\left(\frac{z}{z-p_1}-\frac{z}{z-p_2}\right)\right]=\frac{a}{p_1-p_2}\left(p_1{}^n-p_2{}^n\right)u(n)$$

其中 p_1， p_2 为 $H(z)$ 的极点

$$p_1=\frac{b_1+\sqrt{b_1{}^2+4b_2}}{2}，\quad p_2=\frac{b_1-\sqrt{b_1{}^2+4b_2}}{2}$$

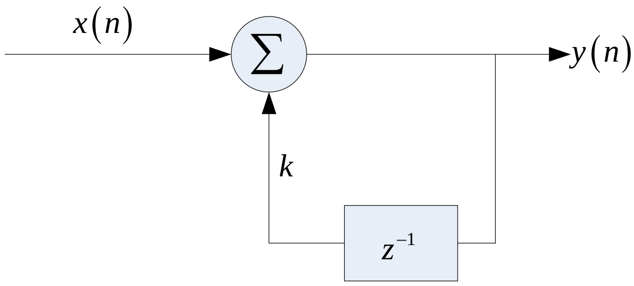
8-32 解题过程：

（1） $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z}{z-k}=\frac{1}{1-kz^{-1}}=\left(1-kz^{-1}\right)Y(z)=X(z)$

两边取逆 z 变换可得差分方程

$$y(n)-ky(n-1)=x(n)$$

（2）由差分方程可得系统结构图如下：



（3）系统频率响应为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-k}=\frac{1}{1-ke^{j\omega}}=\frac{1}{(1-k\cos\omega)+jk\sin\omega}$$

故幅度响应 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\omega}}$

相位响应 $\varphi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{k\sin\omega}{1-k\cos\omega}$

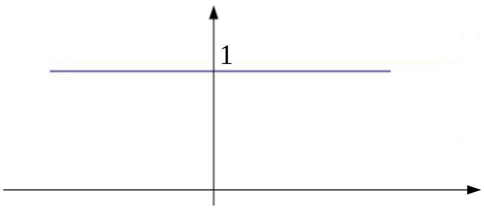
① $k=1$， $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1$， $\varphi(\omega)=0$

② $k=0.5$， $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{1.25-\cos\omega}}$， $\varphi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{\sin\omega}{2-\cos\omega}$

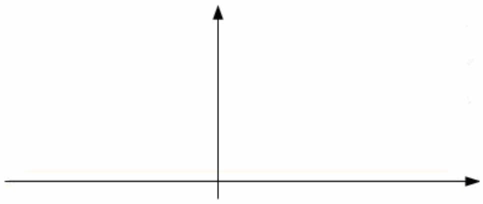
③$k=1$，$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2(1-\cos\omega)}}=\dfrac{1}{2\left|sin\dfrac{\omega}{2}\right|}$，

$$\varphi(\omega)=-\tan^{-1}\frac{\sin\omega}{2-\cos\omega}=-\tan^{-1}\left(\cot\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\omega-\pi}{2}$$

当$k=0$时，幅频响应和相频响应如下图

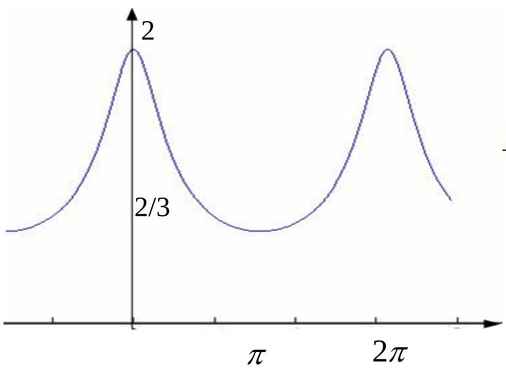


幅频响应

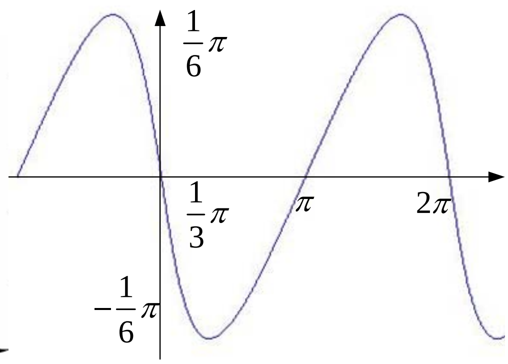


相频响应

当$k=0.5$时，幅频响应和相频响应如下图

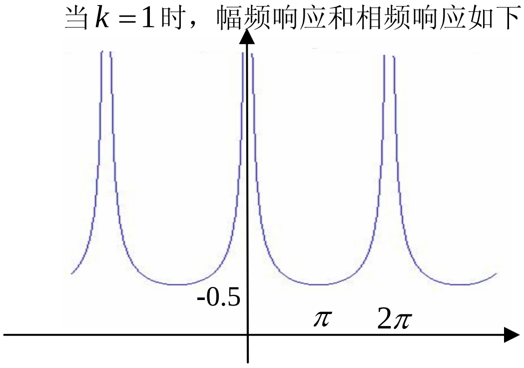


幅频响应

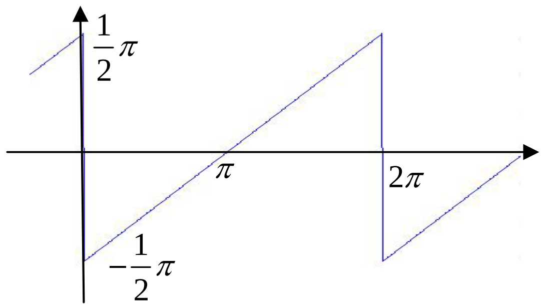


相频响应

当$k=1$时，幅频响应和相频响应如下图



幅频响应



相频响应

8-33 解题过程：（1）$H(z)=\dfrac{1}{z-0.5}$零极点分布与幅度响应如图

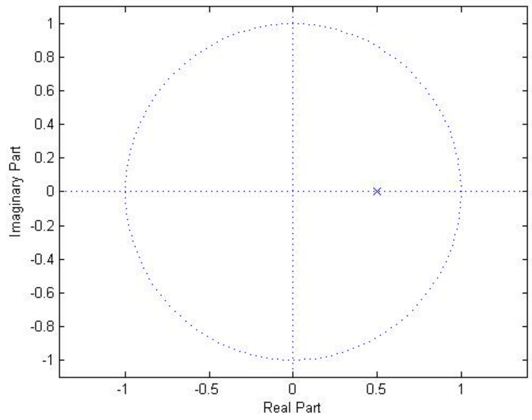


图 8-33_1(a) 零极点分布

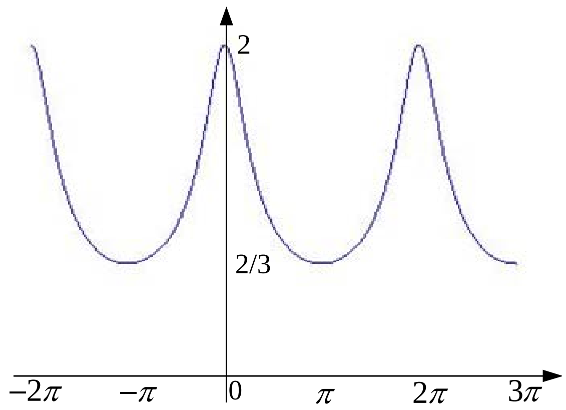


图 8-33_1(b) 幅度响应

（2）$H(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$，相比于$H(z)=\dfrac{1}{z-0.5}$，只在$z=0$处增加一个零点，幅度响应不发生变化，零极点分布与幅度响应如图

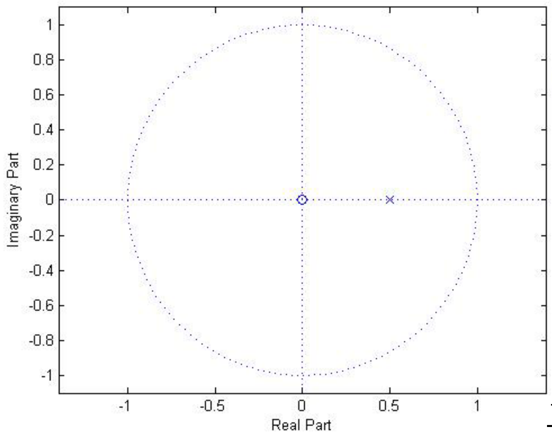


图 8-33_2(a) 零极点分布

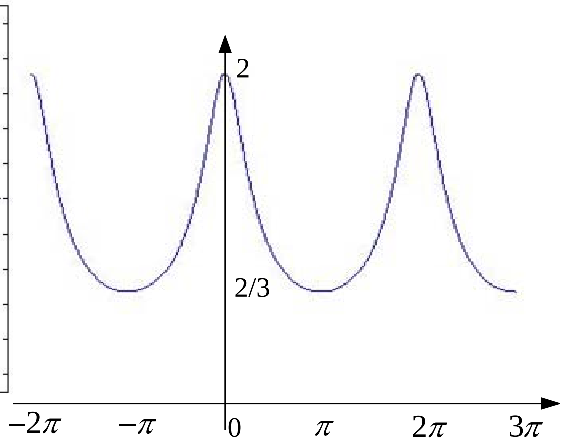
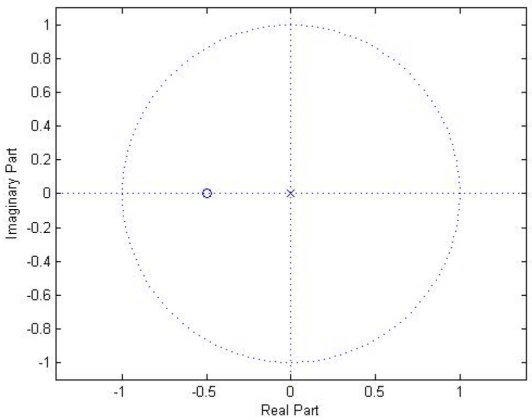
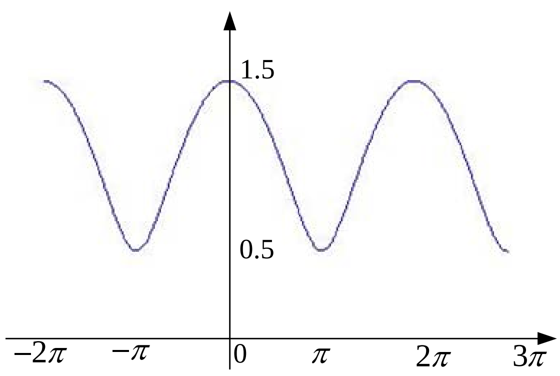


图 8-33_2(b) 幅度响应

（3）$H(z)=\dfrac{z+0.5}{z}$，零极点分布与幅度响应如图





8-37 解题过程：

（1） $y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$

作 z 变换 $Y(z)-\frac{3}{4}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)+\frac{1}{3}z^{-1}X(z)$

系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\dfrac{z\left(z+\frac{1}{3}\right)}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$

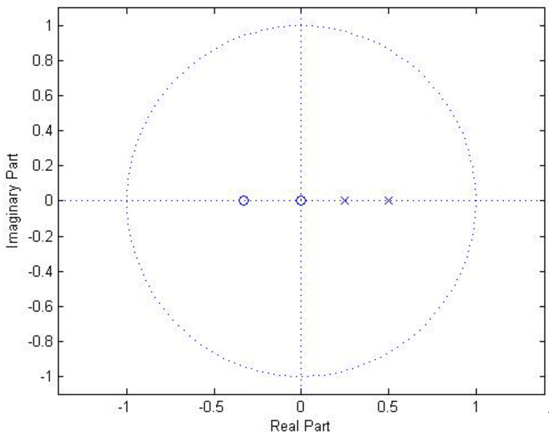
$$=\frac{10}{3}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{z}}\right)-\frac{7}{3}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{z}}\right)\left(|z|>\frac{1}{2}\right)$$

单位样值响应 $h(n)=\mathscr{Z}^{-1}\left[H(z)\right]=\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

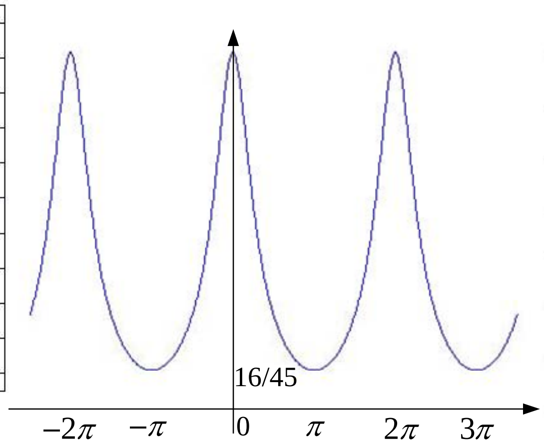
（2） $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{z\left(z+\frac{1}{3}\right)}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=\dfrac{z\left(z+\frac{1}{3}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$

零极点分布如图

（3）由零极点分布得系统幅频响应为解图

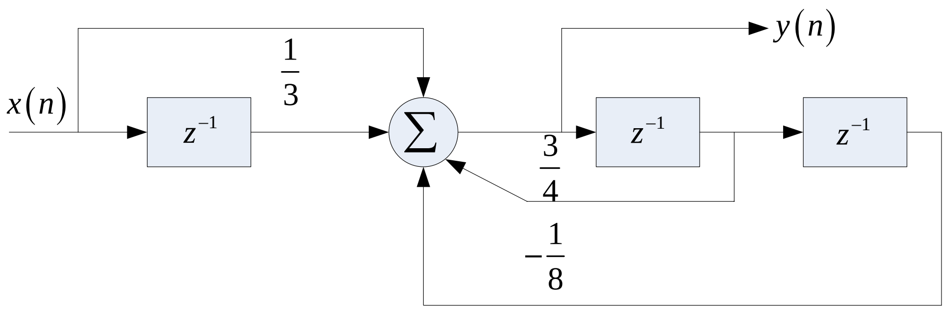


零极点图



幅频响应

（4）由差分方程的系统结构如图



9-2 解：设周期序列 $x_p(n)$ 的周期为 N，则：

$$X_p(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

$$X_p^*(k)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right]^*=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_p(n)\right]^*\left[e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right]^*$$

由于 $x_p(n)$ 是实数序列

$$\left[x_p(n)\right]^*=x_p(n)$$

而 $\left[e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right]^*=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$

于是 $X_p^*(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$

故 $X_p^*(-k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=X_p(k)$

9-3 解题过程：

设 $x_p(n)$ 的周期为 N，则 $X_p(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$

$$X_p^*(k)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right]^*=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

变量置换，令 $n=-n$，则

$$X_p^*(k)=\sum_{n=0}^{-(N-1)}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

由于 $x_p(n)$ 是 n 的偶函数，所以 $x_p(-n)=x_p(n)$

又知 $x_p(n)$ 是以 N 为周期的周期序列，故其在任一周期内的 DFS 应相同，即

$$\sum_{n=0}^{-(N-1)}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

故 $X_p^*(n)=\sum_{n=0}^{-(N-1)}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=X_p(n)$

因此 $X_p(k)$ 是实数序列。

又由题 9-2 可知，对实数序列 $x_p(n)$，有 $X_p(k)=X_p{}^*(-k)$

也即 $X_p{}^*(k)=X_p(-k)$

因此 $X_p(k)=X_p(-k)$

即 $X_p(k)$ 为 k 的偶函数。

9-7 解题过程：

设 $x_p(n)$ 如图 9-7(a)所示，由定义有

$$x((-n))_N=x_p(-n)$$

因此，$x((-n))_N$ 序列即 $x_p(n)$ 序列以 $n=0$ 点为轴反转，如解图 9-7(b)所示。

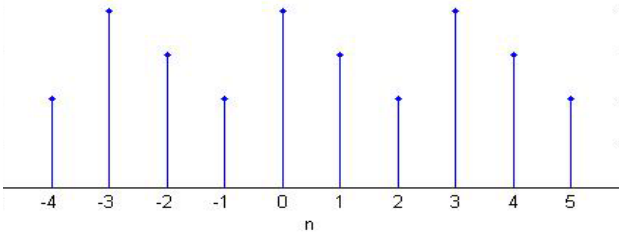


图 9-7(a)

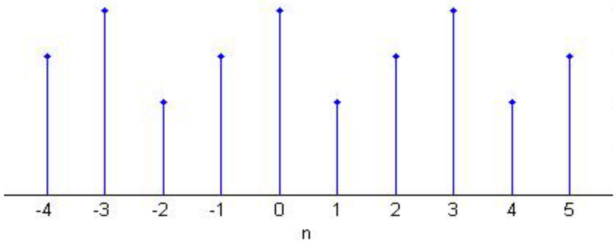


图 9-7(b)

9-8 解题过程：

由定义 $X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W^{nk}$

其矩阵形式为 $\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$

又有$W=e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$，$N=4$

故$W^4=W^0$，$W^6=W^2$，$W^9=W^1$且$W^2=-W^0$，$W^3=-W^1$

而$W^0=1$，$W^1=-j$

所以$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2+j \\ -5 \\ 2-j \end{bmatrix}$

又$x(n)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk}$其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^{-1} & -W^0 & -W^{-1} \\ W^0 & -W^{-0} & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^{-1} & -W^{-0} & W^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2+j \\ -5 \\ 2-j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

与原$x(n)$一致。

9-9 解题过程：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(ae^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(ae^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right)^n}{1-ae^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}=\frac{1-a^N}{1-ae^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}\qquad 0\le k\le N-1$$

9-11 解题过程：如题图 9-11

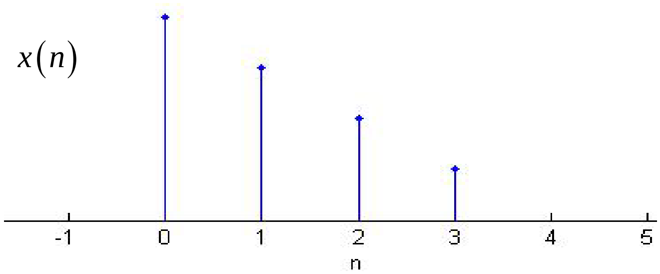


图 9-11

先由$x(n)$绘出$x((n))_4$，在据$x((n))_4$绘出$x((n-2))_4$，得$x_1(n)$如解图 9-11(a)。

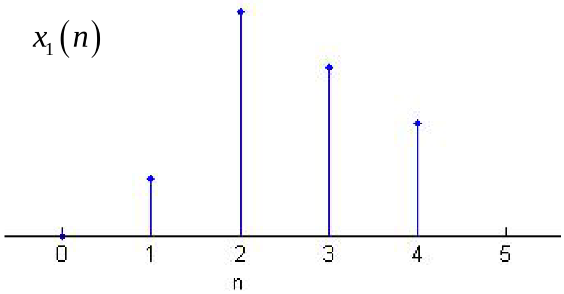


图 9-11(a)

同样，得 $x_2(n)$ 如解图 9-11(b)所示。

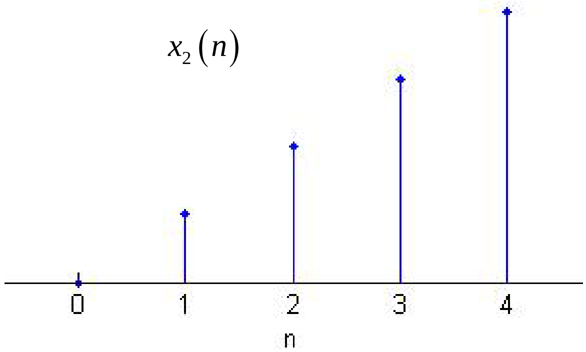
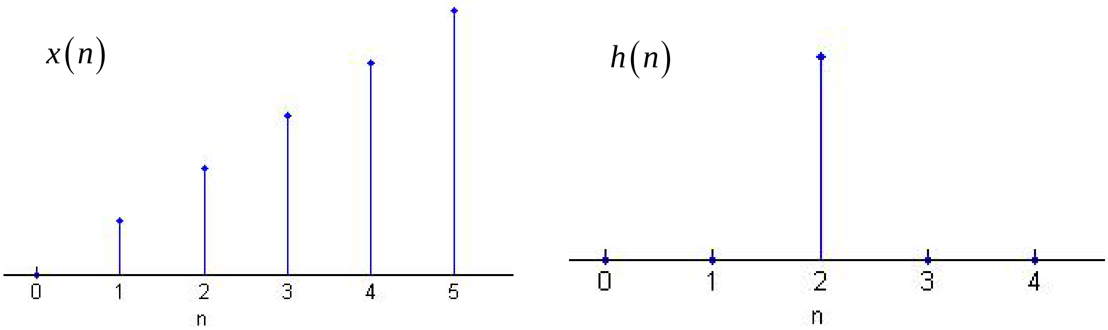


图 9-11(b)

9-12 解题过程：

如题图 9-12



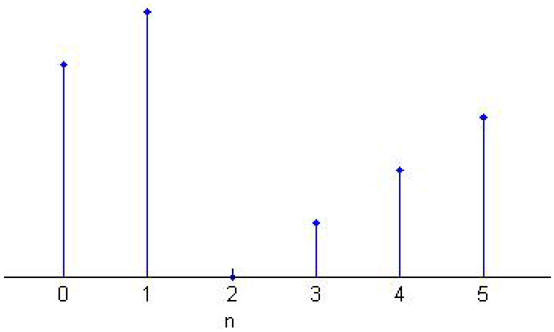
题图 9-12

$$x(n)\otimes h(n)=\sum_{m=0}^{5}h(m)x((n-m))_6R_6(n)$$

$$=\sum_{m=0}^{5}\delta(m-2)x((n-m))_6R_6(n)$$

$$=x((n-2))_6R_6(n)$$

其结果如解图 9-12 所示。



解图 9-12

9-13 解题过程：

$$IDFT\left[Y(k)\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y(k)W^{-nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left((k-l)\right)_N W^{-nk}=\frac{1}{N}\sum_{m=-l}^{N-1-l}X\left((m)\right)_N W^{-n(m+l)}$$

由于 $X\left((m)\right)_N$ 及 $W^{-n(m+l)}$ 都以 N 为周期，

所以 $\frac{1}{N}\sum_{m=-l}^{N-1-l}X\left((m)\right)_N W^{-n(m+l)}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X\left((m)\right)_N W^{-n(m+l)}$$

$$=\left[\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X\left((m)\right)_N W^{-nm}\right]\cdot W^{-nl}$$

$$=\left[\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X(m)W^{-nm}\right]\cdot W^{-nl}$$

$$=x(n)\cdot W^{-nl}$$

即 $IDFT\left[Y(k)\right]=x(n)\cdot W^{-nl}$

9-21 解题过程：

因为 $x(n)=x_1(n)+jx_2(n)$，$x_1(n)$，$x_2(n)$ 为实序列。

所以 $x_1(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(n)\right]$，$jx_2(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(n)\right]$

$$DFT\left[x_1(n)\right]=X_1(k)=\frac{1}{2}\left\{DFT\left[x(n)\right]+DFT\left[x^*(n)\right]\right\}$$

$$DFT\left[jx_2(n)\right]=X_2(k)=\frac{1}{2}\left\{DFT\left[x(n)\right]-DFT\left[x^*(n)\right]\right\}$$

又 $DFT\left[x^*(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W^{nk}=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{-nk}\right]^*$

由于 W^{nk} 是 N 的周期函数，而有 $W^{(N-k)n}=W^{-nk}$

于是 $DFT\left[x^*(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W^{nk}=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{-nk}\right]^*=X^*(n-k)$

因此 $X_1(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(N-k)\right]$， $X_2(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(N-k)\right]$

9-22 解题过程：

$$
\begin{aligned}
X(k)=DFT\left[x(n)\right]&=\sum_{n=0}^{N-1}R_N(n)W^{nk}\\
&=\sum_{n=0}^{N-1}W^{nk}=\frac{1-W^{kN}}{1-W^k}(k\neq 0)\\
&=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}Nk}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=0
\end{aligned}
$$

若 $k=0$，则 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$ ，故 $X(k)=N\delta(k)$

帕斯瓦尔定理：$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$ 此题中 $\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$

$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|N\delta(k)\right|^2=N$，故帕斯瓦尔定理成立。

9-23 解题过程：

由逆变换定义 $\mathrm{x}(\mathrm{n})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk}$

所以 $x(\text{-}n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{nk}$

将变量 n， k 的取值范围都是从 0 到 N-1,据离散傅里叶变换的定义有

$DFT\left[x(n)\right]=Nx(-k)R_N(n)$

9-24 解题过程：

（1）$\mathscr{Z}\left[X(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}R_N(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}(|z|>0)$

（2）$DFT\left[x(n)\right]=Nx(-k)R_N(n)$

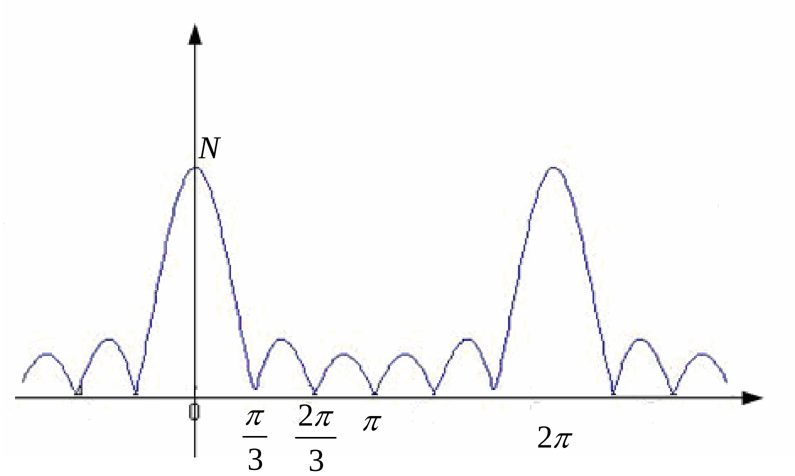
$DFT\left[x^*(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W^{nk}=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{-nk}\right]^*=X^*(n-k)$

（3） $X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(z\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}}\left(e^{j\frac{NW}{2}}-e^{-j\frac{NW}{2}}\right)}{e^{-j\frac{W}{2}}\left(e^{j\frac{W}{2}}-e^{-j\frac{W}{2}}\right)}$

$$=\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}}=\underbrace{\left|\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|}_{\text{幅度}}e^{\underbrace{-j\frac{(N-1)\omega}{2}+j\theta(\omega)}_{\text{相位}}}$$

由于对 $\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$ 取绝对值时，分子分母符号可能不同，因而相位特性有一个 $\theta\left(\omega\right)$，$\theta\left(\omega\right)$ 可能为 0 或 π 。

幅度特性曲线如解图 9-24 所示。（设 $N=6$）



解图 9-24

9-34 解题过程：

（1）由于 $f_1\le 5Hz$，所以 $T_1=\frac{1}{f_1}\ge\frac{1}{5}=0.2s$

（2）由于 $T_s\le\frac{1}{2f_1}$，而最高频率 $f_h\le 1.25kHz$

故 $T_s\le\frac{1}{2f_1}=\frac{1}{2\times1.25\times10^3}=0.4ms$，取 $T_s=0.4ms$

（3）由于 $N=\frac{T_1}{T_s}$ 故 $N\gg\frac{0.2}{0.4\times10^{-3}}=500$ 一般要求 N 为 2 的整数幂，故取 $N=2^9=512$

所以 $T1=NT_s=512\times0.4\times2=0.2048$